QA
273
T4

АКАДЕМИЯ НАУК СССР

[TEORIIA VEROIATNOSTEI
I EE PRIMENENIIA

ТЕОРИЯ ВЕРОЯТНОСТЕЙ

И ЕЕ ПРИМЕНЕНИЯ

ТОМ I
ВЫПУСК
1

U. of ILL. LIBRARY
MAY 1 1974
CHICAGO CIRCLE

1956

ИЗДАТЕЛЬСТВО АКАДЕМИИ НАУК СССР
МОСКВА

СОСТАВ РЕДКОЛЛЕГИИ:

Бернштейн С. Н., Гнеденко Б. В., Золотарев В. М. (ответственный секретарь), ***Колмогоров А. Н.*** (главный редактор), ***Королюк В. С.*** (зам. гл. редактора), ***Линник Ю. В., Сарымсаков Т. А., Смирнов Н. В., Хинчин А. Я.***

Адрес редакции: Москва В—234, МГУ, Мех.-Матем. факультет, тел. В 9-18-01

ТЕОРИЯ ВЕРОЯТНОСТЕЙ
Том I И ЕЕ ПРИМЕНЕНИЯ *Выпуск 1*
1956

ПОТОКИ СЛУЧАЙНЫХ СОБЫТИЙ БЕЗ ПОСЛЕДЕЙСТВИЯ

А. Я. ХИНЧИН

§ 1. Постановка задачи

Поток однородных случайных событий представляет собой случайный процесс $x(t)\,(t \geqslant 0)$, в котором функция $x(t)$ (число событий, наступающих в промежутке времени* $(0, t)$) — неубывающая и способная принимать лишь целые неотрицательные значения. Полное стохастическое описание такого потока мы получаем, задавая для любого натурального числа n и для любой группы из n моментов времени $0 < t_1 < t_2 < \ldots < t_n$ n — мерный закон распределения вектора $[x(t_1),\ x(t_2), \ldots, x(t_n)]$. Вместо этого можно, очевидно, задать и закон распределения вектора $[x(t_1),\ x(t_2) - x(t_1), \ldots, x(t_n) - x(t_{n-1})]$.

Поток событий называется *стационарным*, если закон распределения вектора $[x(a + t_i) - x(a),\ 1 \leqslant i \leqslant n]$ зависит только от чисел $t_1, t_2, \ldots, t_n$, но не зависит от a (и, следовательно, при любом $a \geqslant 0$ совпадает с законом распределения вышеприведенного вектора $x(t_i),\ 1 \leqslant i \leqslant n$). Поток называется *потоком без последействия*, если для любой системы (u_i, v_i) $(1 \leqslant i \leqslant n)$ попарно не пересекающихся промежутков времени разности $x(v_i) - x(u_i)\,(1 \leqslant i \leqslant n)$ представляют собой взаимно независимые случайные величины. Если $v_k(\alpha, \beta)\,(0 \leqslant \alpha < \beta,\ k \geqslant 0$ целое) означает вероятность равенства $x(\beta) - x(\alpha) = k$ (т. е. вероятность того, что в течение промежутка (α, β) наступит k событий данного потока), то поток без последействия, очевидно, полностью описывается заданием системы функций $v_k(\alpha, \beta)$ $(0 \leqslant \alpha < \beta,\ k \geqslant 0)$, так как тем самым задается распределение разности $x(\beta) - x(\alpha)$ для любого промежутка (α, β). Если данный поток к тому же стационарный, то величина $v_k(\alpha, \alpha + t)$ зависит только от k и t и может быть обозначена через $v_k(t)$ (вероятность наступления k событий в произвольном промежутке длины t).

Если к требованиям стационарности и отсутствия последействия добавить еще условие

$$\lim \frac{1 - v_0(t) - v_1(t)}{t} = 0, \tag{1}$$

то, как известно ([1], глава 1),

$$v_k(t) = e^{-\lambda t} \frac{(\lambda t)^k}{k!}\ (k = 0, 1, \ldots);$$

---

* Промежутком времени (a, b) мы во всем дальнейшем называем совокупность всех t, для которых $a \leqslant t < b$.

распределение величины $x(t)$ при сделанных трёх допущениях определяется, таким образом, однозначно с точностью до произвольного положительного числа λ (это число называют «интенсивностью» данного потока).

Недавно Редхеффером [2] и автором ([1], §8) найдена и общая форма стационарных потоков без последействия без дополнительного требования (1). С другой стороны, уже давно известна форма потока без последействия, удовлетворяющего требованию (1), но, вообще говоря, нестационарного *.

За последнее время, с одной стороны, обнаружилось, что для приложений имеет значение исследование потоков без последействия весьма общего вида. С другой стороны, удалось найти методы, сделавшие возможным исследования такого рода для некоторых специальных задач (см., например, рассмотрение известной задачи Эрланга у Пальма [3] или у автора [1], § 24; см. также работу Такача [4] о дробовом эффекте). Поэтому естественно встает вопрос об общей форме потоков без последействия. Настоящая работа имеет целью дать ответ на этот вопрос; полученное решение задачи можно признать удовлетворительным, так как все элементы произвола искомой структуры выявлены в нем с исчерпывающей ясностью.

Пусть $\Lambda(t)$ означает (конечное или бесконечное) математическое ожидание числа событий данного потока, наступающих в промежутке $(0, t)$. Очевидно, $\Lambda(t)$ есть неотрицательная и неубывающая функция от t, которую мы будем называть *ведущей функцией* данного потока. Будем называть этот поток *финитным*, если $\Lambda(t) < +\infty$ $(t \geqslant 0)$. Во всем дальнейшем мы будем рассматривать только финитные потоки. Случай $\Lambda(t) = +\infty$ представляет собой задачу совсем особого рода, вряд ли способную отвечать запросам большинства приложений.

Если $\Lambda(t)$ — любая неотрицательная, конечная, неубывающая функция от t, то формулы

$$v_k(\alpha, \beta) = \exp\{-[\Lambda(\beta) - \Lambda(\alpha)]\} \frac{[\Lambda(\beta) - \Lambda(\alpha)]^k}{k!} \quad (0 \leqslant \alpha < \beta,\ k \geqslant 0) \qquad (2)$$

всегда определяют некоторый поток без последействия, ведущая функция которого совпадает с $\Lambda(t)$. Именно этот поток обычно и рассматривают, когда исходят от ведущей функции $\Lambda(t)$. Однако такое ограничение, вообще говоря, представляется необоснованным. Как мы увидим, потоки типа (2) образуют лишь частный случай финитных потоков без последействия, так что, ограничиваясь потоками типа (2), мы подменили бы общее исследование проблемы рассмотрением частных случаев. Правда, потоки типа (2) образуют собою, как мы увидим, в известном смысле фундамент всей совокупности финитных потоков без последействия; но это как раз и надо показать с полной ясностью для того, чтобы специальное исследование потоков типа (2) получило хотя бы временное обоснование.

---

* Правда, при этом обычно предполагается еще существование некоторой «мгновенной интенсивности» $\lambda(t)$ потока любого момента времени t.

§ 2. Леммы о финитных потоках

Для решения поставленной задачи нам понадобится ряд элементарных и по большей части легко доказуемых вспомогательных предложений. Многие из этих лемм не связаны с отсутствием последействия и имеют силу для всех финитных потоков; такими леммами мы и займемся в настоящем параграфе; таким образом, во всех последующих предположениях этого параграфа данный поток предполагается финитным, а во всем остальном — произвольным.

Лемма 1. *При* $0 \leqslant \alpha < \beta$ *всегда* $\sum_{k=0}^{\infty} v_k(\alpha, \beta) = 1$.

Доказательство. Очевидно, разность $1 - \sum_{i=0}^{k} v_i(\alpha, \beta)$ есть вероятность того, что в промежутке (α, β) наступит более k событий данного потока. Поэтому на основании неравенства Чебышева

$$1 - \sum_{i=0}^{k} v_i(\alpha, \beta) < \frac{\Lambda(\beta) - \Lambda(\alpha)}{k},$$

и, следовательно,

$$1 - \sum_{i=0}^{k} v_i(\alpha, \beta) \to 0 \quad (k \to \infty),$$

ч. и т. д.

Лемма 2. *При* $k \geqslant 0$ *и* $t > 0$ *существует предел*

$$\lim_{h \to +0} v_k(t - h, t + h) = p_k(t). \tag{3}$$

Доказательство. Положим для $k \geqslant 0$, $0 \leqslant \alpha < \beta$

$$\sum_{r=k}^{\infty} v_r(\alpha, \beta) = \psi_k(\alpha, \beta).$$

Так как $\psi_k(\alpha, \beta)$ есть вероятность того, что в промежутке (α, β) наступит по меньшей мере k событий, то величина $\psi(t - h, t + h)$ при положительном и убывающем h не может возрастать. Поэтому всегда существует

$$\lim_{h \to +0} \psi_k(t - h, t + h).$$

В силу соотношения $v_k(\alpha, \beta) = \psi_k(\alpha, \beta) - \psi_{k+1}(\alpha, \beta)$ существует и предел (3), ч. и т. д.

Условимся называть точку (момент времени) t *регулярной* или *сингулярной* точкой данного финитного потока, смотря по тому, будет ли $p_0(t) = 1$ или $p_0(t) < 1$.

Лемма 3. *Все точки непрерывности функции* $\Lambda(t)$ *— регулярные, а все ее точки разрыва — сингулярные точки данного потока.*

Доказательство. Так как

$$1 - v_0(t - h, t + h) = \sum_{k=1}^{\infty} v_k(t - h, t + h) \leqslant$$

$$\leqslant \sum_{k=1}^{\infty} k v_k(t - h, t + h) = \Lambda(t + h) - \Lambda(t - h),$$

то в случае $\Lambda(t+0)=\Lambda(t-0)$ мы имеем

$$1-p_0(t)=\lim_{h\to+0}[1-v_0(t-h,\ t+h)]=0,$$

что доказывает первое утверждение леммы 3.

Далее, при $t>0$, $0<h<t$ и любом целом $m>0$

$$\Lambda(t+h)-\Lambda(t-h)=\sum_{k=1}^{\infty}kv_k(t-h,\ t+h)=$$

$$=\sum_{k=1}^{\infty}\psi_k(t-h,\ t+h)=\sum_{k=1}^{m}\psi_k(t-h,\ t+h)+\sum_{k>m}\psi_k(t-h,\ t+h).$$

Пусть $\varepsilon>0$ задано произвольно. Закрепим сначала некоторое h_0, $0<h_0<t$, и выберем число m столь большим, чтобы было

$$R_m(h_0)=\sum_{k>m}\psi_k(t-h_0,\ t+h_0)<\varepsilon;$$

тогда и подавно при $0<h\leqslant h_0$

$$R_m(h)<\varepsilon,$$

и следовательно

$$\Lambda(t+h)-\Lambda(t-h)<\sum_{k=1}^{m}\psi_k(t-h,\ t+h)+\varepsilon\ \ (0<h\leqslant h_0). \tag{4}$$

Но здесь

$$\sum_{k=1}^{m}\psi_k(t-h,\ t+h)\leqslant m\psi_1(t-h,\ t+h)\leqslant m\,[1-v_0(t-h,\ t+h)].$$

Если $p_0(t)=1$ (т. е. t — регулярная точка потока), то

$$1-v_0(t-h,\ t+h)\to 0\ (h\to+0);$$

поэтому при достаточно малом $h>0$

$$\sum_{k=1}^{m}\psi_k(t-h,\ t+h)<\varepsilon,$$

и неравенство (4) дает при достаточно малом $h>0$

$$\Lambda(t+h)-\Lambda(t-h)<2\varepsilon;$$

следовательно, $\Lambda(t+0)=\Lambda(t-0)$, и второе утверждение леммы 3 также доказано.

Лемма 4. *Финитный поток может иметь не более счетного множества сингулярных точек.*

Доказательство непосредственно вытекает из леммы 3.

Лемма 5. *Пусть L — финитный поток, и L' — поток тех событий потока L, моменты наступления которых отличны от некоторого фиксированного момента t_0. Тогда t_0 есть регулярная точка потока L'.*

Доказательство. Пусть $0<h_0<t_0$. Обозначим через w_n вероятность того, что в области

$$\frac{h_0}{2^n}<|t-t_0|\leqslant\frac{h_0}{2^{n-1}} \tag{Δ_n}$$

наступит по меньшей мере одно событие потока L'. Если промежуток $(t_0 - h_0,\ t_0 + h_0)$ содержит события потока L', то то же самое должно иметь место и для по меньшей мере одной из областей (Δ_n) $(n = 1, 2, \ldots)$. Поэтому, если обозначить вообще через $w(\alpha, \beta)$ вероятность наличия событий потока L' в промежутке (α, β), мы будем иметь

$$w(t_0 - h_0,\ t_0 + h_0) \leqslant \sum_{n=1}^{\infty} w_n.$$

Аналогичным образом находим для любого натурального числа k

$$w\left(t_0 - \frac{h_0}{2^k},\ t_0 + \frac{h_0}{2^k}\right) \leqslant \sum_{n=k+1}^{\infty} w_n. \tag{5}$$

Пусть теперь v_{nk} означает вероятность того, что в область (Δ_n) попадет k событий потока L'; тогда

$$w_n = \sum_{k=1}^{\infty} v_{nk} \leqslant \sum_{k=1}^{\infty} k v_{nk} = \mu_n, \tag{6}$$

где μ_n означает математическое ожидание числа событий потока L' в области (Δ_n). Так как поток L (а следовательно и поток L') — финитный, то ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \mu_n$ сходится; в силу (6) сходится поэтому и ряд $\sum_{n=1}^{\infty} w_n$. Но тогда (5) показывает, что $w(t_0 - h, t_0 + h) \to 0$ $(h \to +0)$, и, следовательно, t_0 есть регулярная точка потока L', ч. и т. д.

Условимся во всем дальнейшем называть финитный поток *регулярным*, если он не имеет ни одной сингулярной точки, так что любое $t\ (0 \leqslant t < +\infty)$ является для него регулярной точкой. Тогда из леммы 3 непосредственно следует

Лемма 6. *Необходимым и достаточным условием регулярности потока служит непрерывность его ведущей функции.*

Наконец, нам понадобится еще следующая

Лемма 7. *Если* $0 < \alpha < \beta$ *и данный поток — регулярный, то равномерно в отрезке* $\alpha \leqslant t \leqslant \beta$

$$v_0(t - h,\ t + h) \to 1 \quad (h \to +0).$$

Доказательство. В силу леммы 1

$$1 - v_0(t - h,\ t + h) = \sum_{k=1}^{\infty} v_k(t - h,\ t + h) \leqslant$$

$$\leqslant \sum_{k=1}^{\infty} k v_k(t - h,\ t + h) = \Lambda(t + h) - \Lambda(t - h),$$

и утверждение леммы 7 вытекает из равномерной непрерывности функции $\Lambda(t)$ в любом конечном отрезке.

§ 3. Леммы о регулярных потоках без последействия

Лемма 8. *Для любого регулярного потока без последействия и любых* α, β $(0 \leqslant \alpha < \beta)$

$$v_0(\alpha, \beta) > 0.$$

Доказательство. Допустим, что $v_0(\alpha, \beta) = 0$, и положим $\gamma = \frac{1}{2}(\alpha + \beta)$. Так как данный поток — без последействия, то $0_0(\alpha, \beta) = v_0(\alpha, \gamma)\, v_0(\gamma, \beta)$ и, следовательно, либо $v_0(\alpha, \gamma) = 0$, либо $v_0(\gamma, \beta) = 0$. Безграничное продолжение этого процесса известным образом приводит нас к точке ξ, обладающей следующим свойством: при любом $h > 0$ промежуток $(\xi - h, \xi + h)$ содержит другой промежуток (a, b), для которого $v_0(a, b) = 0$; но тогда и подавно при любом $h > 0$ мы имеем $v_0(\xi - h, \xi + h) = 0$, откуда $p_0(\xi) = 0$, что стоит в противоречии с регулярностью данного потока. Лемма 8 доказана.

Условимся во всем дальнейшем называть функцию

$$\Phi(x, \alpha, \beta) = \sum_{k=0}^{\infty} v_k(\alpha, \beta)\, x^k$$

(где ряд в правой части при любых α, β сходится по меньшей мере для $|x| \leqslant 1$) *производящей функцией* данного потока. Если этот поток — регулярный и без последействия, то по лемме 8 $v_0(\alpha, \beta) > 0$, и, следовательно, разложение

$$\ln \Phi(x, \alpha, \beta) = \sum_{k=0}^{\infty} \omega_k(\alpha, \beta)\, x^k$$

функции $\ln \Phi(x, \alpha, \beta)$ по степеням x сходится в некоторой окрестности точки $x = 0$. По известным свойствам производящих функций мы имеем для потоков без последействия при $\alpha < \gamma < \beta$

$$\Phi(x, \alpha, \beta) = \Phi(x, \alpha, \gamma)\, \Phi(x, \gamma, \beta),$$

и, следовательно,

$$\ln \Phi(x, \alpha, \beta) = \ln \Phi(x, \alpha, \gamma) + \ln \Phi(x, \gamma, \beta),$$

что в свою очередь имеет следствием

$$\omega_k(\alpha, \beta) = \omega_k(\alpha, \gamma) + \omega_k(\gamma, \beta) \qquad (k \geqslant 0).$$

Поэтому, если положить $\omega_k(0, t) = \chi_k(t)$ $(t \geqslant 0,\ k \geqslant 0)$, то $\omega_k(\alpha, \beta) = \chi_k(\beta) - \chi_k(\alpha)$, и мы получаем в некоторой окрестности точки $x = 0$ разложение

$$\ln \Phi(x, \alpha, \beta) = \sum_{k=0}^{\infty} [\chi_k(\beta) - \chi_k(\alpha)]\, x^k. \tag{7}$$

Для установления общего вида регулярного потока без последействия имеют существенное значение свойства функций $\chi_k(t)$; изучению этих свойств и будет посвящен конец настоящего параграфа.

Лемма 9. *При* $0 \leqslant \alpha < \beta$, $n \geqslant 1$ *и достаточно малом* $x > 0$

$$\frac{\partial^n \ln \Phi}{\partial x^n} = \frac{\Phi^{(n)}}{\Phi} + \sum a_{i_1 \ldots i_n} \frac{\Phi^{(i_1)} \ldots \Phi^{(i_n)}}{\Phi^n}; \tag{8}$$

здесь положено $\Phi = \Phi(x, \alpha, \beta)$, $\Phi^{(i)} = \dfrac{\partial^i \Phi(x, \alpha, \beta)}{\partial x^i}$; *коэффициенты* $a_{i_1 \dots i_n}$ *зависят только от* n *и индексов* $i_1, \dots, i_n$ *(и не зависят от* α, β *и* x*); суммирование распространяется на все системы индексов* $i_1, \dots, i_n$, *подчиненные условиям*

$$0 \leqslant i_k < n \quad (1 \leqslant k \leqslant n), \qquad \sum_{k=1}^{n} i_k = n.$$

Соотношение (8) представляет собою элементарную формулу дифференциального исчисления, имеющую место для любой n-кратно дифференцируемой функции $\Phi(x)$ [$\Phi(0) = 0$]. Доказательство автоматически проводится индукцией по n [при $n = 1$ формула (8) тривиальна] и может быть предоставлено читателю.

Лемма 10. *Пусть* $0 \leqslant \alpha < \beta$, $n \geqslant 1$ *и данный поток — регулярный и без последействия. Пусть* $\alpha = \alpha_0 < \alpha_1 < \dots < \alpha_s = \beta$, $d(s) = \max\limits_{1 \leqslant r \leqslant s} (\alpha_r - \alpha_{r-1})$. *Тогда в формуле (7)*

$$\chi_n(\beta) - \chi_n(\alpha) = \lim_{d(s) \to 0} \sum_{r=1}^{s} \frac{v_n(\alpha_{r-1}, \alpha_r)}{v_0(\alpha_{r-1}, \alpha_r)}. \tag{9}$$

Предварительное замечание. В силу леммы 8 в правой части (9) все знаменатели отличны от нуля.

Доказательство. В ходе последующего рассуждения мы под $\Phi^{(i)}$ $(i = 0, 1, \dots)$ всегда будем понимать значение производной $\dfrac{\partial^i \Phi(x, \alpha, \beta)}{\partial x^i}$ при $x = 0$.

Так как в силу (7)

$$\chi_n(\beta) - \chi_n(\alpha) = \frac{1}{n!} \left\{ \frac{\partial^n \ln \Phi(x, \alpha, \beta)}{\partial x^n} \right\}_{x=0} \quad (n \geqslant 0),$$

то соотношение (8) при $n \geqslant 1$ дает

$$\chi_n(\beta) - \chi_n(\alpha) = \frac{1}{n!} \left\{ \frac{\Phi^{(n)}}{\Phi} + \sum a_{i_1 \dots i_n} \frac{\Phi^{(i_1)} \dots \Phi^{(i_n)}}{\Phi^n} \right\}.$$

Так как, очевидно, $\Phi^{(i)} = i!\, v_i(\alpha, \beta)$ $(i \geqslant 0)$, то отсюда

$$\chi_n(\beta) - \chi_n(\alpha) = \frac{v_n(\alpha, \beta)}{v_0(\alpha, \beta)} + \sum b_{i_1 \dots i_n} \frac{v_{i_1}(\alpha, \beta) \dots v_{i_n}(\alpha, \beta)}{[v_0(\alpha, \beta)]^n}, \tag{10}$$

где область суммирования определяется соотношениями

$$0 \leqslant i_k < n \quad (1 \leqslant k \leqslant n), \qquad \sum_{k=1}^{n} i_k = n,$$

а коэффициенты $b_{i_1 \dots i_n}$, подобно прежним $a_{i_1 \dots i_n}$, не зависят от α и β. Если мы разобьем промежуток (α, β) на s промежутков (α_{i-1}, α_i) $(1 \leqslant i \leqslant s)$, как это описано в формулировке леммы 10, то соотношение (10) имеет место для всех промежутков (α_{i-1}, α_i), и притом с одними и теми же коэффициентами $b_{i_1 \dots i}$. Написав все эти соотношения и складывая их

почленно, мы получаем

$$\chi_n(\beta)-\chi_n(\alpha)=\sum_{r=1}^{s}\frac{v_n(\alpha_{r-1},\alpha_r)}{v_0(\alpha_{r-1},\alpha_r)}+\sum\upsilon_{i_1\dots in}\sum_{r=1}^{s}\frac{v_{i_1}(\alpha_{r-1},\alpha_r)\dots v_{i_n}(\alpha_{r-1},\alpha_r)}{[v_0(\alpha_{r-1},\alpha_r)]^n}. \quad (11)$$

Чтобы доказать лемму 10, нам надо только установить, что при $d(s)=\max\limits_{1\leqslant r\leqslant s}(\alpha_r-\alpha_{r-1})\to 0$ второе слагаемое правой части формулы (11) становится бесконечно малым. Это же в свою очередь будет доказано, если мы убедимся, что для любой фиксированной, принадлежащей области суммирования системы индексов $i_1, i_2, \dots, i_n$ величина

$$S=\sum_{r=1}^{s}\frac{v_{i_1}(\alpha_{r-1},\alpha_r)}{v_0(\alpha_{r-1},\alpha_r)}\frac{v_{i_2}(\alpha_{r-1},\alpha_r)}{v_0(\alpha_{r-1},\alpha_r)}\cdots\frac{v_{i_n}(\alpha_{r-1},\alpha_r)}{v_0(\alpha_{r-1},\alpha_r)}$$

стремится к нулю $d(s)\to 0$.

С этой целью заметим прежде всего, что при $n=1$ область суммирования $0\leqslant i_k<n\,(1\leqslant k\leqslant n)$, $\sum\limits_{k=1}^{n}i_k=n$ становится пустою; второе слагаемое правой части (11). Поэтому мы допустим, что $n>1$ и что для всех чисел $<n$ лемма 10 уже доказана.

Обратимся теперь к исследованию величины S. В силу леммы 7 при любом $\varepsilon>0$ и достаточно малом $d(s)$

$$1-v_0(\alpha_{r-1},\alpha_r)<\varepsilon \quad (1\leqslant r\leqslant s),$$

и, следовательно,

$$\frac{1-v_0(\alpha_{r-1},\alpha_r)}{v_0(\alpha_{r-1},\alpha_r)}<\frac{\varepsilon}{1-\varepsilon} \quad (1\leqslant r\leqslant s).$$

Но при $i_k>0$ мы имеем

$$v_{i_k}(\alpha_{r-1},\alpha_r)\leqslant 1-v_0(\alpha_{r-1},\alpha_r),$$

и, следовательно,

$$\frac{v_{i_k}(\alpha_{r-1},\alpha_r)}{v_0(\alpha_{r-1},\alpha_r)}<\frac{\varepsilon}{1-\varepsilon} \quad (1\leqslant r\leqslant s),$$

в то время как при $i_k=0$ это отношение равно 1. Но в силу условий $i_k<n\,(1\leqslant k\leqslant n)$ и $\sum\limits_{k=1}^{n}i_k=n$ среди индексов $i_k\,(1\leqslant k\leqslant n)$ найдется по крайней мере два положительных. Пусть, например, такими будут индексы i и l. Тогда приведенные выше оценки дают

$$S\leqslant\sum_{r=1}^{s}\frac{v_i(\alpha_{r-1},\alpha_r)}{v_0(\alpha_{r-1},\alpha_r)}\frac{v_l(\alpha_{r-1},\alpha_r)}{v_0(\alpha_{r-1},\alpha_r)}<\frac{\varepsilon}{1-\varepsilon}\sum_{r=1}^{s}\frac{v_l(\alpha_{r-1},\alpha_r)}{v_0(\alpha_{r-1},\alpha_r)}.$$

Так как $l<n$, то мы можем принять, что лемма 10 уже доказана с l вместо n; поэтому последняя сумма при $d(s)\to 0$ имеет пределом $\chi_l(\beta)-\chi_l(\alpha)$. А так как ε при достаточно малом $d(s)$ может быть выбрано сколь угодно малым, то $S\to 0$ при $d(s)\to 0$, чем лемма 10 и доказана.

Лемма 11. *При* $n \geqslant 1$, $\chi_n(t)$ *есть неубывающая функция от* t; *ряд*

$$\sum_{n=0}^{\infty} n\,[\chi_n(\beta) - \chi_n(\alpha)]$$

сходится при любых α, β *для всех* $t \geqslant 0$

$$\sum_{n=0}^{\infty} \chi_n(t) = 0.$$

Доказательство. Первое утверждение непосредственно вытекает из леммы 10, в силу которой $\chi_n(\beta) - \chi_n(\alpha) \geqslant 0$ $(\beta \geqslant \alpha)$. Далее из леммы 10 следует при любом $m \geqslant 1$

$$\sum_{l=1}^{m} l\,[\chi_l(\beta) - \chi_l(\alpha)] = \lim_{d(s)\to 0} \sum_{r=1}^{s} \frac{1}{v_0(\alpha_{r-1}, \alpha_r)} \sum_{l=1}^{m} l v_l(\alpha_{r-1}, \alpha_r) \leqslant$$

$$\leqslant \limsup_{d(s)\to 0} \sum_{r=1}^{s} \frac{\Lambda(\alpha_r) - \Lambda(\alpha_{r-1})}{v_0(\alpha_{r-1}, \alpha_r)} = \Lambda(\beta) - \Lambda(\alpha)$$

[последнее равенство вытекает из того, что в силу леммы 7 $v_0(\alpha_{r-1}, \alpha_r)$ при $d(s) \to 0$ стремится к 1 равномерно относительно r $(1 \leqslant r \leqslant s)$]. Так как правая часть этого равенства не зависит от m, то доказано и второе утверждение леммы. Наконец, из этого второго утверждения следует, что формула (7) имеет место при $|x| \leqslant 1$. В частности, при $x = 1$ это дает

$$0 = \ln \Phi(1, \alpha, \beta) = \sum_{k=0}^{\infty} [\chi_k(\beta) - \chi_k(\alpha)],$$

чем доказано и третье утверждение леммы 11.

Лемма 12. *Каждая функция* $\chi_k(t)$ $(k = 0, 1, \ldots)$ *всюду непрерывна.*

Доказательство. Допустим, что для некоторого $k \geqslant 1$ и некоторого $t \geqslant 0$

$$\chi_k(t + 0) - \chi_k(t - 0) > 0.$$

Так как все функции $\chi_k(t)$ $(k \geqslant 1)$ — неубывающие, то тогда

$$\chi_0(t + 0) - \chi_0(t - 0) = -\sum_{k=1}^{\infty} [\chi_k(t + 0) - \chi_k(t - 0)] < 0.$$

Так как

$$\ln \Phi(0, t - h, t + h) = \chi_0(t + h) - \chi_0(t - h),$$

то при достаточно малом $h > 0$

$$\ln \Phi(0, t - h, t + h) < -\alpha,$$

или

$$\Phi(0, t - h, t + h) = v_0(t - h, t + h) < e^{-\alpha},$$

где α — положительная постоянная. А отсюда следует, что

$$\lim_{h\to +0} v_0(t - h, t + h) \leqslant e^{-\alpha} < 1,$$

что противоречит допущению о регулярности данного потока. Этим лемма 12 доказана.

§ 4. Общая форма регулярных потоков без последействия

Леммы § 3 в своей совокупности показывают, что производящая функция $\Phi(x, \alpha, \beta)$ любого регулярного потока без последействия имеет вид

$$\Phi(x, \alpha, \beta) = \exp\left\{\sum_{k=0}^{\infty} [\chi_k(\beta) - \chi_k(\alpha)]\, x^k\right\}, \tag{12}$$

где функции $\chi_k(t)$ [$\chi_k(0) = 0$] обладают следующими свойствами:

1°. Все функции $\chi_k(t)$ всюду непрерывны;

2°. при любом k функция $\chi_k(t)$ монотонна (неубывающая при $k > 0$ и невозрастающая при $k = 0$);

3°. ряд $\sum_{k=0}^{\infty} k\chi_k(t)$ сходится при любом $t \geqslant 0$;

4°. сумма $\sum_{k=0}^{\infty} \chi_k(t)$ при любом $t \geqslant 0$.

Теперь мы докажем обратное предположение: *если* $\Phi(x, \alpha, \beta)$ *есть функция вида (12), где функции* $\chi_k(t)$ *удовлетворяют требованиям* 1°—4°, *то существует регулярный поток без последействия, производящая функция которого совпадает с функцией* $\Phi(x, \alpha, \beta)$.

Так как в силу свойства 2° разность $\chi_k(\beta) - \chi_k(\alpha)$ при $k > 0$ и $\alpha < \beta$ неотрицательна, то, как известно, существует поток без последействия L_k, для которого

$$v_m^{(k)}(\alpha, \beta) = \begin{cases} \exp\{-[\chi_k(\beta) - \chi_k(\alpha)]\} \dfrac{[\chi_k(\beta) - \chi_k(\alpha)]^r}{r!} & (m = kr) \\ 0 \quad (m \not\equiv 0 \bmod k) \end{cases}$$

[$v_m^{(k)}(\alpha, \beta)$ означает вероятность того, что в промежутке (α, β) наступит m событий потока L_k]; требуемое для этого условие, чтобы при $\alpha < \gamma < \beta$ всегда было

$$v_m^{(k)}(\alpha, \beta) = \sum_{i=0}^{m} v_i^{(k)}(\alpha, \gamma)\, v_{m-i}^{(k)}(\gamma, \beta),$$

легко проверяется непосредственным подсчетом. Производящая функция потока L_k равна

$$\Phi_k(x, \alpha, \beta) = \sum_{r=0}^{\infty} v_{rk}^{(k)}(\alpha, \beta)\, x^{rk} =$$

$$= \exp\{-[\chi_k(\beta) - \chi_k(\alpha)]\} \sum_{r=0}^{\infty} \frac{[\chi_k(\beta) - \chi_k(\alpha)]^r}{r!}\, r^{rk} =$$

$$= \exp\{[\chi_k(\beta) - \chi_k(\alpha)]\,(x^k - 1)\}.$$

Рассмотрим теперь суперпозицию L определенных нами потоков $L_1, L_2, \ldots, L_n, \ldots$, которые будем предполагать взаимно независимыми. Легко убедиться, что производящая функция потока L (который, очевидно, есть поток без последействия) совпадает с

$$F(x, \alpha, \beta) = \prod_{k=1}^{\infty} \Phi_k(x, \alpha, \beta).$$

В самом деле, если положить

$$F(x, \alpha, \beta) = \sum_{r=0}^{\infty} v_r(\alpha, \beta)\, x^r$$

(этим соотношением определяется число $v_r(\alpha, \beta)$), то, очевидно, для любого $r \geqslant 0$

$$v_r(\alpha, \beta) = \sum v_{r_1}^{(1)}(\alpha, \beta)\, v_{r_2}^{(2)}(\alpha, \beta) \ldots v_{r_k}^{(k)}(\alpha, \beta) \ldots, \qquad (13)$$

где суммирование распространяется на область

$$r_k \geqslant 0 \quad (k \geqslant 1), \quad \sum_{k=1}^{\infty} r_k = r.$$

Но в силу взаимной независимости потоков L_k сумма в правой части (13), очевидно, равна вероятности того, что в промежутке (α, β) наступит r событий суммарного потока L. В силу (13), число $v_r(\alpha, \beta)$ совпадает с этой вероятностью, а это и значит, что $F(x, \alpha, \beta)$ есть производящая функция потока L.

Но в силу свойства 4° мы имеем

$$F(x, \alpha, \beta) = \prod_{k=1}^{\infty} \Phi_k(x, \alpha, \beta) = \exp\left\{\sum_{k=1}^{\infty} [\chi_k(\beta) - \chi_k(\alpha)]\,(x^k - 1)\right\} =$$

$$= \exp\left\{\sum_{k=1}^{\infty} [\chi_k(\beta) - \chi_k(\alpha)]\, x^k - \sum_{k=1}^{\infty} [\chi_k(\beta) - \chi_k(\alpha)]\right\} =$$

$$= \exp\left\{\sum_{k=0}^{\infty} [\chi_k(\beta) - \chi_k(\alpha)]\, x^k\right\} = \Phi(x, \alpha, \beta).$$

Этим показано, что данная функция $\Phi(x, \alpha, \beta)$ действительно есть производящая функция некоторого потока без последействия L. Нам остается только убедиться, что построенный нами поток L — регулярный.

В силу свойства 3° для любых $\varepsilon > 0$ и $t > 0$ найдется такое $N > 0$, что

$$\sum_{k>N} k\chi_k(t) > \varepsilon. \qquad (14)$$

Так как поток $L_k\,(k = 1, 2, \ldots)$ имеет непрерывную (в силу свойства 1°) ведущую функцию $k\chi_k(t)$, то он регулярен в силу леммы 6. Следовательно, для любой фиксированной точки $\gamma\,(0 < \gamma < t)$ при достаточно малом $h_0 > 0$ и при $0 < h < h_0$

$$\sum_{k=1}^{N} [1 - v_0^{(k)}(\gamma - h,\ \gamma + h)] < \varepsilon. \qquad (15)$$

Но при $0 \leqslant \alpha < \beta$

$$1 - v_0^{(k)}(\alpha, \beta) = \sum_{p=1}^{\infty} v_p^{(k)}(\alpha, \beta) \leqslant \sum_{p=1}^{\infty} p v_p^{(k)}(\alpha, \beta) = k\,[\chi_k(\beta) - \chi_k(\alpha)].$$

[так как $k\chi_k(t)$ есть ведущая функция потока L_k]. Из (15) и (14) следует поэтому при $0<h<h_0$, $0<\gamma-h<\gamma+h<t$

$$\sum_{k=1}^{\infty}[1-v_0^{(k)}(\gamma-h,\gamma+h)]\leqslant\sum_{k=1}^{N}[1-v_0^{(k)}(\gamma-h,\ \gamma+h)]+$$
$$+\sum_{k>N}[1-v_0^{(k)}(0,t)]<\varepsilon+\sum_{k>N}k\chi_k(t)<2\varepsilon.$$

Поэтому для суммарного потока L мы получаем при $0<h<h_0$

$$1-v_0(\gamma-h,\gamma+h)\leqslant\sum_{k=1}^{\infty}[1-v_0^{(k)}(\gamma-h,\ \gamma+h)]<2\varepsilon$$

[$1-v_0(\gamma-h,\ \gamma+h)$ есть вероятность того, что в промежутке $(\gamma-h,\gamma+h)$ наступит по меньшей мере одно событие потока L]. Но это означает, что γ — регулярная точка потока L; а так как выбор этой точки произволен, то поток L — регулярный, ч. и т. д.

Мы можем, таким образом, формулировать результаты §§ 3 и 4 в виде следующего предложения.

Теорема I. *Каждый регулярный поток без последействия имеет производящую функцию* $\Phi(x,\alpha,\beta)$ *вида* (12), *где функции* $\chi_k(t)$ *удовлетворяют требованиям* 1° — 4°; *обратно, каждая такая функция* $\Phi(x,\alpha,\beta)$ *есть производящая функция некоторого регулярного потока без последействия.*

Посмотрим теперь еще, какой вид принимает общая форма (12) для некоторых известных классов потоков без последействия.

1. Пусть данный поток при любом $\alpha\geqslant 0$ удовлетворяет требованию

$$1-v_0(\alpha,\ \beta)-v_1(\alpha,\ \beta)=\sum_{k=2}^{\infty}v_k(\alpha,\ \beta)=o(\beta-\alpha)\quad(\beta\to\alpha+0)$$

(ср. [1], § 1), и пусть при любом $\alpha\geqslant 0$ существует предел

$$\lim_{\beta\to\alpha+0}\frac{1-v_0(\alpha,\beta)}{\beta-\alpha}=\lambda(\alpha).$$

Тогда формула (9) леммы 10 легко дает

$$\chi_1(\beta)-\chi_1(\alpha)=\int_{\alpha}^{\beta}\lambda(u)\,du,\quad\chi_k(\beta)-\chi_k(\alpha)=0\qquad(k>1),$$

откуда в силу свойства 4°

$$\chi_0(\beta)-\chi_0(\alpha)=-\int_{\alpha}^{\beta}\lambda(u)\,du,$$

и формула (12) получает вид

$$\Phi(x,\alpha,\beta)=\exp\left\{(x-1)\int_{\alpha}^{\beta}\lambda(u)\,du\right\}.$$

Это — давно известный результат (см. [1], стр. 17 *, или [6], стр. 183

* Пользуюсь случаем указать на грубую опечатку: под знаком последней суммы стр. 17 [1] пропущен множитель x^k.

2. Пусть данный поток — стационарный; положим

$$\lim_{t\to+0}\frac{1-v_0(t)}{t}=\lambda,\qquad \lim_{t\to+0}\frac{v_k(t)}{t}=\lambda p_k\quad (k>0);$$

тогда формула (9) леммы 10 дает при любом $t\geqslant 0$

$$\chi_k(t)=\lambda t p_k\,(k\geqslant 1),\quad \chi_0(t)=-\lambda t,$$

и формула (12) получает вид

$$\Phi(x,\ 0,\ t)=\exp\left\{\lambda t\left(\sum_{k=1}^{\infty}p_k x^k-1\right)\right\}.$$

Это полностью совпадает с формулой (8.6) ([1], стр. 31) и является известным результатом Редхеффера [2] и автора.

§ 5. Общая форма финитных потоков без последействия

До сих пор мы рассматривали только регулярные потоки, т. е. такие, ведущая функция $\Lambda(t)$ которых всюду непрерывна. Теперь мы обратимся к рассмотрению любого финитного потока без последействия, так что функция $\Lambda(t)$ всюду конечна, но может быть как угодно разрывной. Как мы знаем из § 2, точки разрыва функции $\Lambda(t)$ — это сингулярные точки данного потока.

Условимся теперь называть поток S *сингулярным*, если он обладает следующими тремя свойствами.

1) События потока S могут наступать лишь в некоторые заранее определенные моменты времени; эти моменты, которые мы будем называть *ступенями* потока S, образуют не более чем счетное множество.

2) Числа событий, падающих на различные ступени, представляют собою взаимно независимые случайные величины.

3) Пусть $q_k^{(i)}\,(k\geqslant 0,\ i\geqslant 1)$ означает вероятность того, что на ступень t_i придется k событий; тогда при любом $t>0$

$$\sum_{0\leqslant t_i\leqslant t}\ \sum_{k=0}^{\infty}kq_k^{(i)}<+\infty.$$

Свойство 2) выражает собой отсутствие последействия, а свойство 3) — финитность потока S. Очевидно, сингулярный поток однозначно определяется заданием чисел t_i и $q_k^{(i)}\,(i\geqslant 1,\ k\geqslant 0)$. Структура такого потока представляется поэтому совершенно прозрачной: выбор чисел t_i и $q_k^{(i)}$ подчинен только требованиям $t_i\geqslant 0$, $q_k^{(i)}\geqslant 0$ и $\sum\limits_{k=0}^{\infty}q_k^{(i)}=1\,(i=1,2,\ldots)$, в остальном же остается произвольным.

Пусть теперь нам дан произвольный финитный поток K без последействия. Обозначим через $t_1,\ t_2,\ \ldots$ сингулярные точки этого потока, занумерованные в произвольном порядке. Мы будем рассматривать поток K как суперпозицию двух потоков R и S. Будем считать некоторое событие потока K принадлежащим потоку S, если оно наступает в один из моментов $t_1,\ t_2,\ \ldots$, в противном случае мы будем считать его при-

надлежащим потоку R. Можно убедиться (чего мы здесь делать не будем), что оба потока S и R — без последействия, и что они взаимно независимы (ср. работу Марчевского [5]).

Докажем в первую очередь регулярность потока R. Пусть $K_i\,(i \geqslant 1)$ означает совокупность событий потока K, моменты наступления которых отличны от t_i. В силу леммы 5 точка t_i является регулярной для потока K_i, а значит и подавно — для потока $R \subset K_i$. Но точка t, отличная от всех t_i, по самому определению чисел t_i регулярна для потока K, а значит и для $R \subset K$. Таким образом, поток R не имеет сингулярных точек и, следовательно, регулярен.

Что касается потока S, то сингулярность его очевидна из самого определения; ступенями его служат числа $t_i\,(i \geqslant 1)$. Мы покажем еще, что его характеристические вероятности $q_k^{(i)}$ соответственно совпадают с определенными в § 2 числами

$$p_k(t_i) = \lim_{h \to +0} v_k(t_i - h,\ t_i + h) \qquad (k \geqslant 0,\ i \geqslant 1)$$

Пусть поток $K_i\,(i \geqslant 1)$ определяется как выше, и пусть $v_k^{(i)}(\alpha, \beta)$ означает вероятность того, что в промежутке (α, β) наступит k событий потока K_i. Тогда для потока K мы, очевидно, имеем при $i \geqslant 1,\ k \geqslant 0$

$$v_k(t_i - h,\ t_i + h) = \sum_{l=0}^{k} q_l^{(i)} v_{k-l}^{(i)}(t_i - h,\ t_i + h). \tag{16}$$

Так как t_i (в силу леммы 5) есть регулярная точка потока K_i, то при $h \to +0$

$$v_{k-l}^{(i)}(t_i - h,\ t_i + h) \to \begin{cases} 1 & (l = k), \\ 0 & (l < k). \end{cases}$$

Поэтому соотношение (16) при $h \to +0$ дает в пределе

$$p_k(t_i) = \lim_{h \to +0} v_k(t_i - h,\ t_i + h) = q_k^{(i)} \quad (i \geqslant 1,\ k \geqslant 0),$$

ч. и т. д.

Резюмируя результаты настоящего параграфа, мы приходим к следующему предложению.

Теорема II. *Всякий финитный поток без последействия может рассматриваться, как суперпозиция двух взаимно независимых потоков того же типа, из которых один — регулярный, а другой — сингулярный; ступенями t_i сингулярной компоненты служат при этом сингулярные точки данного потока, а характеристическими вероятностями $q_k^{(i)}$ — соответствующие числа $p_k(t_i)\,(i \geqslant 1,\ k \geqslant 0)$ данного потока.*

Непосредственно очевидно, что и обратно — любая суперпозиция описанного типа представляет собою некоторый финитный поток без последействия.

Теорема I и II вместе взятые дают легко обозримое описание совокупности всех финитных потоков случайных событий без последействия, что и было целью настоящего исследования.

Поступила в редакцию
25. 12. 55

ЛИТЕРАТУРА

[1] А. Я. Хинчин, Математические методы теории массового обслуживания, Труды Мат. инст. им. Стеклова, **49**, (1955), 1—122.
[2] R. M. Redheffer, Math. Magazine, **26**, (1953), 185—188.
[3] C. Palm, Intensitätsschwankungen im Fernsprechverkehr, Ericsson Technics, **44**, (1943), 1—189.
[4] L. Takacs, Acta math. hung., **5**, (1954), 203—236.
[5] E. Marzewski, Studia math. (Warszawa), **13**, No 1, (1953), 130—136.
[6] Фрай Торнтон, Теория вероятностей для инженеров, М. — Л., ГТТИ, 1934.

NACHWIRKUNGSFREIE FOLGEN VON ZUFÄLLIGEN EREIGNISSFN

A. KHINTCHINE (MOSKAU)

(Zusammenfassung)

Eine Folge von gleichartigen zufälligen Ereignissen ist ein stochastischer Prozess $x(t)$ $(t \geqslant 0)$, in welchem die Funktion $x(t)$ [die Anzahl der in der Zeitstrecke $(0, t)$ eintretenden Ereignisse] niemals abnehmend und nur ganzer nichtnegativer Werte fähig ist. Eine vollständige stochastische Beschreibung der gegebenen Folge liegt vor, wenn für jede endliche Reihe $0 < t_1 < t_2 < \ldots < t_n$ von Zeitpunkten das n-dimensionale Verteilungsgesetz des Vectors $[x(t_1), x(t_2), \ldots, x(t_n)]$ gegeben ist. Statt dessen kann offenbar auch die Verteilung des Vektors $[x(t_1), x(t_2) - x(t_1), \ldots, x(t_n) - x(t_{n-1})]$ angegeben werden.

Eine Folge von Ereignissen heisst *stazionär*, wenn das Verteilungsgesetz des Vektors $[x(a + t_i) - x(a), 1 \leqslant i \leqslant n]$ nur von $t_1, t_2, \ldots, t_n$ und nicht von a abhängt [und folglich bei jedem $a \geqslant 0$ mit dem Verteilungsgesetz des oben angeführten Vektors $x(t_i)$, $1 \leqslant i \leqslant n$ zusammenfällt]. Die Folge heisst *nachwirkungsfrei*, wenn die Differenzen $x(v_i) - x(u_i)$ für jedes System von paarweise punktfremden Zeitstrecken (u_i, v_i), $1 \leqslant i \leqslant n$ gegenseitig unabhängige zufällige Grössen sind. Bezeichnet man mit $v_k(\alpha, \beta)$ $(0 \leqslant \alpha < \beta, k \geqslant 0$ ganz) die Wahrscheinlichkeit der Gleichung $x(\beta) - x(\alpha) = k$ [*d. h.* die Wahrscheinlichkeit dafür, dass in der Zeitstrecke (α, β) k Ereignisse der gegebenen Folge eintreten], so wird offenbar eine nachwirkungsfreie Folge durch die Angabe des Funktionensystems $v_k(\alpha, \beta)$, $k = 0, 1, 2, \ldots$ vollständig beschrieben, denn dann ist eben die Verteilung von $x(\beta) - x(\alpha)$ für jede Zeitstrecke (α, β) bekannt. Ist die Folge dazu stazionär, so ist $v_k(\alpha, \alpha + t)$ nur von k und t abhängig und kann mit $v_k(t)$ bezeichnet werden [$v_k(t)$ ist die Wahrscheinlichkeit des Eintretens von k Ereignissen in einer beliebigen Zeitstrecke der Länge t].

Wird nun zu den beiden Annahmen der Nachwirkungsfreiheit und Stazionarität noch die dritte hinzugefügt, dass nämlich

$$\lim_{t \to +0} \frac{1 - v_0(t) - v_1(t)}{t} = 0 \tag{1}$$

ist, so erhält man bekanntlich ([1], Kap. I)

$$v_k(t) = e^{-\lambda t} \frac{(\lambda t)^k}{k!} \qquad (k = 0, 1, 2, \ldots);$$

die Verteilung von $x(t)$ ist also durch die getroffenen Annahmen bis auf die willkürliche positive Konstante λ (die «Intensität» der Ereignisströmung) vollständig definiert.

Vor kurzem konnten Redheffer [2] und der Verfasser ([1] § 8) auch die allgemeine Form der nachwirkungsfreien stazionären Folgen aufstellen, wo also von der Forderung (1) abgesehen wird. Andererseits kennt man schon längst die Form der nachwirkungsfreien Folgen, die (1) genügen, aber im allgemeinen nicht stazionär sind.

In der letzten Zeit hat sich nun einerseits gezeigt, dass für die Anwendungen auch Untersuchungen über nachwirkungsfreie Folgen sehr allgemeiner Art von Wichtigkeit sind. Andererseits konnte man aber auch Methoden erfinden, die in manchen Einzelauf-

gaben solche Untersuchungen ermöglichten (vgl. z. B. die Betrachtung des bekannten Erlangschen Problems durch C. Palm [3], auch [1], § 24, und die Abhandlung von Takács [4] über den Schroteffekt). Demgemäss entsteht natürlicherweise die Frage nach der allgemeinen Form der nachwirkungsfreien Folgen von Ereignissen. Vorliegende Abhandlung enthält eine Lösung dieses Problems, die mir befriedigend erscheint, da sie alle willkürlichen Elemente der gesuchten Struktur in einfacher und leicht übersichtlicher Weise zum Vorschein bringt.

Ausser der Nachwirkungsfreiheit setzen wir nur noch voraus, dass die mathematische Erwartung $\Lambda(t)$ der Anzahl der in der Zeitstrecke $(0, t)$ eintretenden Ereignisse der betrachteten Folge für alle $t \geqslant 0$ endlich ist. Ein Zeitpunkt t soll für die gegebene Folge *regulär* oder *singulär* heissen, jenachdem $\Lambda(t)$ in t stetig oder unstetig ist; hat die Folge nur reguläre Punkte, so soll sie selbst *regulär* heissen.

Endlich soll die Funktion

$$\Phi(x, \alpha, \beta) = \sum_{k=0}^{\infty} v_k(\alpha, \beta) x^k$$

als *erzeugende Funktion* der gegebenen Folge bezeichnet werden; durch die Angabe von $\Phi(x, \alpha, \beta)$ wird also die gegebene (nachwirkungsfreie) Folge vollständig beschrieben.

Satz 1.— *Jede reguläre nachwirkungsfreie Folge zufälliger Ereignisse hat eine erzeugende Funktion der Form*

$$\Phi(x, \alpha, \beta) = \exp\left\{\sum_{k=0}^{\infty} [\chi_k(\beta) - \chi_k(\alpha)] x^k\right\},$$

wo die Funktionen $\chi_k(t)$ $[\chi_k(0) = 0]$ *folgenden Forderungen genügen*

1° $\chi_k(t)$ *ist für* $t \geqslant 0$ *stetig;*

2° $\chi_k(t)$ *ist nicht zunehmend bei* $k = 0$ *und nicht abnehmend bei* $k > 0$;

3° $$\sum_{k=0}^{\infty} k\chi_k(t) < +\infty \qquad (t \geqslant 0);$$

4° $$\sum_{k=0}^{\infty} \chi_k(t) = 0 \qquad (t \geqslant 0).$$

Umgekehrt ist jede solche Funktion die erzeugende Funktion einer regulären nachwirkungsfreien Folge zufälliger Ereignisse.

Nun soll eine Folge S zufälliger Ereignisse *singulär* heissen, wenn sie folgende drei Eigenschaften hat:

1) Die Ereignisse der Folge S können nur in einer im voraus gegebenen Höchstens abzählbaren Menge von Zeitpunkten t_i $(i = 1, 2, \ldots)$ stattfinden.

2) Die Anzahlen der in verschiedenen t_i eintretenden Ereignisse sind gegenseitig unabhängige zufällige Grössen (so dass S nachwirkungsfrei ist).

3) Bedeutet $q_k^{(i)}$ $(k \geqslant 0,\ i \geqslant 1)$ die Wahrscheinlichkeit dafür, dass in Zeitpunkt t_i genau k Ereignisse von S eintreten, so ist für jedes $t > 0$

$$\sum_{0 \leqslant t_i < t} \sum_{k=0}^{\infty} k q_k^{(i)} < +\infty.$$

Offenbar wird eine singuläre Folge durch die Angabe der Zahlen t_i und $q_k^{(i)}$ $(k \geqslant 0,\ i \geqslant 1)$ eindeutig beschrieben.

Für allgemeine nachwirkungsfreie Folgen [mit endlichem $\Lambda(t)$] gilt nun der

Satz 2.— *Jede nachwirkungsfreie Folge kann als eine Überlagerung von zwei gegenseitig unabhängigen nachwirkungsfreien Folgen aufgefasst werden, deren eine regulär und die andere singulär ist; die Parameter* t_i, $q_k^{(i)}$ *der singulären Komponente lassen sich dabei unmittelbar der Funktion* $\Lambda(t)$ *entnehmen.*

Da die Natur der regulären Komponente vollständig durch Satz 1 beschrieben wird, liefert Satz 2 tatsächlich eine Feststellung der allgemeinen Struktur einer nachwirkungsfreien Folge.

ТЕОРИЯ ВЕРОЯТНОСТЕЙ
Том I И ЕЕ ПРИМЕНЕНИЯ Выпуск 1
1956

EIN SATZ ÜBER GEORDNETE MENGEN VON WAHRSCHEINLICHKEITSVERTEILUNGEN

Von HARALD CRAMÉR

1. Es sei A eine gegebene Menge, deren Punkte oder Elemente mit $a, b, \ldots$ bezeichnet werden. Indem wir A als unsere *Grundmenge* bezeichnen, wollen wir annehmen, dass A eine *vollständig geordnete* Menge ist, und zwar in dem folgenden Sinne.

Auf A ist eine binäre Beziehung zwischen Elementen gegeben, für die wir die Bezeichnung $\gtrsim$ wählen. Es wird angenommen, dass für jedes Paar a, b von Elementen aus A *wenigstens eine* der beiden Beziehungen

$$a \gtrsim b, \qquad b \gtrsim a$$

gilt. Es wird ferner angenommen, dass die Beziehung $\gtrsim$ transitiv ist. Aus $a \gtrsim b$, $b \gtrsim c$ folgt also $a \gtrsim c$.

Mit einer Terminologie, die von gewissen Anwendungen herrührt, wollen wir die Beziehung $a \gtrsim b$ etwa so aussprechen: *a ist wenigstens so gut wie b.*

Wenn gleichzeitig $a \gtrsim a$ und $b \gtrsim a$ gilt, so schreiben wir $a \sim b$. Es ist dann offenbar auch $b \sim a$, und wir sagen, dass a und b *gleichwertig* sind. Aus $a \sim b$, $b \sim c$ folgt offenbar $a \sim c$. Wenn $a \gtrsim b$, aber nicht $a \sim b$ gilt, so schreiben wir $a > b$, und sagen, dass *a besser* als b ist.

Die Gesamtheit aller mit einem gegebenen a gleichwertigen Elemente heisst die *Äquivalenzklasse* von a. Um triviale Fälle auszuschliessen nehmen wir von vornherein an, dass A nicht nur eine endliche Anzahl von Äquivalenzklassen enthält.

Eine reellwertige auf A definierte Funktion $f(a)$ heisst *monoton* im Sinne der gegebenen Ordnungsbeziehung, wenn $f(a) > f(b)$ dann und nur dann gilt, wenn $a > b$. Bekanntlich lässt sich aus den oben gemachten Annahmen die Existenz einer solchen Funktion $f(a)$ nicht folgern. Wenn aber die Ordnungsbeziehungen zwischen den Elementen von A sich auf eine geeignete Menge von Wahrscheinlichkeitsverteilungen in A erweitern lassen, so kann man nach v. Neumann und Morgenstern [3] unter gewissen zusätzlichen Bedingungen die Existenz eines monotonen $f(a)$ ableiten. Wir wollen jetzt zuerst einige diesbezügliche Begriffe und Bezeichnungen einführen.

2. Es sei X_n für jedes $n = 1, 2, \ldots$ die Menge aller derjenigen Wahrscheinlichkeitsverteilungen in A, bei denen die gesamte Wahrscheinlichkeit über höchstens n Punkte aus A verteilt ist. Die Elemente von X_n nen-

nen wir *n-Punktverteilungen* in A. Jedes X_n enthält dann die vorhergehenden $X_1, X_2, \ldots, X_{n-1}$ als echte Teilmengen. Wenn die Vereinigungsmenge aller X_n durch X^* bezeichnet wird, so gilt also

$$X_1 \subset X_2 \subset \ldots \subset X^*.$$

X^* ist dann die Menge aller endlichen diskreten Wahrscheinlichkeitsverteilungen in A.

Wenn x und y irgend zwei Elemente von X^* sind, so bezeichnen wir für jedes reelle λ mit $0 \leqslant \lambda \leqslant 1$ durch $\lambda x + (1-\lambda) y$ das Element von X^*, das in unmittelbar einleuchtender Weise durch lineare Verknüpfung der beiden Wahrscheinlichkeitsverteilungen x und y entsteht. Aus $x \in X_m$, $y \in X_n$ folgt dann offenbar $\lambda x + (1-\lambda) y \in X_{m+n}$.

Jedem Element a von A entspricht eine Einpunktverteilung $x_a \in X_1$, bei der die gesamte Wahrscheinlichkeit 1 im Punkte a verlegt ist. Die Ordnungsbeziehungen zwischen den a können also unmittelbar auf X_1 übertragen werden. Wenn diese Ordnungsbeziehungen sich auf die ganze Menge X^* erweitern lassen, und wenn ausserdem gewisse Regularitätsbedingungen erfüllt sind, so gibt es nach v. Neumann und Morgenstern [3] eine auf X^* definierte reellwertige und monotone Funktion $f(x)$, die ausserdem *linear* ist, d. h. die Gleichung

$$f[\lambda x + (1-\lambda) y] = \lambda f(x) + (1-\lambda) f(y) \tag{1}$$

für beliebige x, y aus X^* und für jedes reelle λ mit $0 \leqslant \lambda \leqslant 1$ befriedigt. Setzen wir dann für jedes $a \in A$

$$f(a) = f(x_a),$$

so ist leicht ersichtlich, dass für jedes $x \in X^*$

$$f(x) = \mathbf{E}_x f(a)$$

gilt, wo $\mathbf{E}_x f(a)$ die gemäss der Wahrscheinlichkeitsverteilung x berechnete mathematische Erwartung der reellen stochastischen Veränderlichen $f(a)$ bedeutet. Es ist dann $f(a)$ eine auf A definierte reellwertige Funktion mit der Eigenschaft, dass für jedes Paar von Elementen x, y aus X^* die Beziehung $x > y$ dann und nur dann gilt, wenn

$$\mathbf{E}_x f(a) > \mathbf{E}_y f(a).$$

Wenn die gegebenen Ordnungsbeziehungen als Ausdruck einer «Präferenzordnung» zwischen verschiedenen Wahrscheinlichkeitsverteilungen in A aufgefasst werden, stellt also die mathematische Erwartung der «Nutzenfunktion» $f(a)$ das geeignete Kriterium für die Wahl zwischen verschiedenen Verteilungen dar. Es war ein Kriterium dieser Art, das seinerzeit Daniel Bernoulli durch die Einführung seiner «moralischen Erwartung» realisieren wollte.

3. Die Resultate von v. Neumann und Morgenstern wurden von anderen Verfassern ergänzt und verallgemeinert. (Vgl. besonders Herstein und Milnor [2], sowie Blackwell und Girshick [1].) Eine wesentliche Voraussetzung dieser Arbeiten scheint jedenfalls zu sein, dass eine vollständig

Ordnung in der ganzen Menge X^* aller endlichen diskreten Wahrscheinlichkeitsverteilungen gegeben sein muss. Wir wollen hier zeigen, dass es in dieser Hinsicht genügt, wenn man nur voraussetzt, dass *die Menge X_2 aller Zweipunktverteilungen geordnet ist.*

Im Folgenden sind $a, b, \ldots$ Elemente der Grundmenge A und x_a, $x_b, \ldots$ die entsprechenden Einpunktverteilungen. $x, y, z, \ldots$ sind Elemente von x_2, während $\lambda, \mu, \ldots$ reelle Zahlen im abgeschlossenen Intervall $[0, 1]$ sind. Die Menge aller λ, die eine gegebene Beziehung B erfüllen, wird durch $\{\lambda \mid B\}$ bezeichnet.

Um unsere Ausdrucksweise zu vereinfachen, wollen wir sagen, dass zwei Elemente x, y von X_2 *befreundet* sind, wenn die Gesamtzahl der Punkte, denen in x oder y eine positive Wahrscheinlichkeit zukommt, höchstens gleich zwei ist. Dann gehört offenbar auch die lineare Verknüpfung $\lambda x + (1-\lambda) y$ zu X_2. Zwei Einpunktverteilungen sind natürlich als Elemente von X_2 immer befreundet.

Satz. *Für eine gegebene vollständig geordnete Grundmenge A seien die folgenden Bedingungen* 1) — 3) *erfüllt:*

1) *Die Ordnungsbeziehungen in A können auf die Menge X_2 aller Zweipunktverteilungen in A erweitert werden, so dass X_2 vollständig geordnet ist.*

2) *Es seien x und y befreundet, und $x \gtrsim z \gtrsim y$. Dann sind die beiden Mengen*

$$\{\lambda \mid \lambda x + (1-\lambda) y \gtrsim z\} \text{ und } \{\lambda \mid z \gtrsim \lambda x + (1-\lambda) y\} \qquad (2)$$

abgeschlossen.

3) *Es seien x, y und x', y' zwei Paare von befreundeten Elementen, und es sei $x \backsim x'$, $y \backsim y'$. Für jedes λ gilt dann*

$$\lambda x + (1-\lambda) y \backsim \lambda x' + (1-\lambda) y'.$$

Dann gibt es eine reellwertige Funktion $f(a)$, die für alle $a \in A$ definiert ist, so dass für irgend zwei Elemente x, y von X_2 die Beziehung $x > y$ dann und nur dann gilt, wenn

$$\mathbf{E}_x f(a) > \mathbf{E}_y f(a).$$

Die Behauptung wird offenbar bewiesen sein, wenn wir die Existenz einer auf X_2 definierten, reellwertigen und monotonen Funktion $f(x)$ nachweisen können, die auf X_2 linear ist, d. h. die Gleichung (1) für beliebige befreundete x, y in X_2 und beliebige in $[0,1]$ befriedigt. Wenn wir nämlich dann $f(a) = f(x_a)$ setzen, so hat $f(a)$ die verlangten Eigenschaften.

Wir bemerken zuerst, dass keine von den Mengen (2) leer ist, da die erste Menge den Punkt $\lambda = 1$, die zweite den Punkt $\lambda = 0$ enthält. Da beide Mengen abgeschlossen sind, und ihre Vereinigungsmenge das geschlossene Intervall $[0,1]$ ist, kann die Durchschnittsmenge nicht leer sein. Unter den Voraussetzungen der Bedingung 2) gibt es also wenigstens ein λ, so dass

$$\lambda x + (1-\lambda) y \backsim z. \qquad (3)$$

Für den Beweis des Satzes werden wir einige Hilfssätze brauchen.

Hilfssatz 1. *Wenn x und y befreundet sind, und $x > y$, so ist für $0 < \lambda < 1$*

$$x > \lambda x + (1-\lambda) y > y. \qquad (4)$$

Ferner ist

$$\lambda x + (1-\lambda)y > \mu x + (1-\mu)y \tag{5}$$

dann und nur dann, wenn $\lambda > \mu$ *ist.*

Nehmen wir zuerst an, dass für irgend ein festes λ_0 mit $0 < \lambda_0 < 1$

$$\lambda_0 x + (1-\lambda_0)y \geq x > x$$

ist. Nach der obigen Bemerkung gibt es dann wenigstens ein λ, so dass

$$\lambda[\lambda_0 x + (1-\lambda_0)y] + (1-\lambda)y \sim x$$

gilt. Offenbar muss hier $\lambda > 0$ sein, da nach Voraussetzung $x > y$ ist. Indem wir $\lambda\lambda_0 = \mu$ setzen, können wir also schliessen, dass es wenigstens ein μ mit $0 < \mu < 1$ gibt, so dass

$$\mu x + (1-\mu)y \sim x \tag{6}$$

ist. Es sei μ_0 die untere Grenze aller μ mit dieser Eigenschaft. Nach der Bedingung 2) gilt dann (6) auch für $\mu = \mu_0$. Da (6) nicht für $\mu = 0$ gilt, ist $0 < \mu_0 < 1$. Dann ist aber nach der Bedingung 3)

$$\mu_0[\mu_0 x + (1-\mu_0)y] + (1-\mu_0)y \sim \mu_0 x + (1-\mu_0)y \sim x,$$
$$\mu_0^2 x + (1-\mu_0^2)y \sim x,$$

was einen Widerspruch enthält, da $\mu_0^2 < \mu_0$ ist. In derselben Weise schliessen wir, dass die Annahme

$$y \geq \lambda_0 x + (1-\lambda_0)y$$

zu einem Widerspruch führt, wodurch (4) bewiesen ist.

Für $\lambda > \mu > 0$ folgt sodann weiter aus (4), da $\lambda x + (1-\lambda)y$ und y befreundet sind,

$$\lambda x + (1-\lambda)y > \frac{\mu}{\lambda}[\lambda x + (1-\lambda)y] + \left(1 - \frac{\mu}{\lambda}\right)y = \mu x + (1-\mu)y.$$

Es gilt also (5) für $\lambda > \mu$, und da die umgekehrte Behauptung jetzt in trivialer Weise folgt, ist Hilfssatz 1 hiermit bewiesen.

Aus Hilfssatz 1 ergibt sich, mit Hilfe der im Zusammenhang mit (3) gemachten Bemerkung, unmittelbar der folgende

Hilfssatz 2. *Wenn* x *und* y *befreundet sind, und* $x > z > y$, *so gibt es ein eindeutig bestimmtes* λ *mit* $0 < \lambda < 1$, *so dass* (3) *gilt.*

Es seien jetzt a und b Punkte von A, so dass $a > b$, und also auch $x_a > x_b$, gilt. Die Menge aller x in X_2, für die $x_a \geq x \geq x_b$ ist, bezeichnen wir durch $I_{a,b}$. Wenn eine reellwertige Funktion $f(x)$ auf $I_{a,b}$ definiert ist und dort die oben angegebenen Monotonitäts- und Linearitätsbedingungen erfüllt, so heisst $f(x)$ auf $I_{a,b}$ monoton und linear.

Hilfssatz 3. *Es seien* a, b, α, β *gegebene Punkte in* A, *mit* $a \geq \alpha > \beta \geq b$. *Wenn* $f(x)$ *und* $g(x)$ *auf* $I_{a,b}$ *monoton und linear sind, und wenn ausserdem*

$$f(x_\alpha) = g(x_\alpha), \qquad f(x_\beta) = g(x_\beta),$$

so ist $f(x) = g(x)$ *für alle* x *in* $I_{a,b}$.

Für geeignet gewählte λ, μ, ν hat man

$$x \sim \lambda x_\alpha + (1-\lambda) x_b,$$
$$x_\alpha \sim \mu x_a + (1-\mu) x_b,$$
$$x_\beta \sim \nu x_a + (1-\nu) x_b,$$

und also nach den Linearitätseigenschaften von $f(x)$

$$f(x) = \lambda f(x_a) + (1-\lambda) f(x_b),$$
$$f(x_\alpha) = \mu f(x_a) + (1-\mu) f(x_b),$$
$$f(x_\beta) = \nu f(x_a) + (1-\nu) f(x_b).$$

Da μ und ν nach Hilfssatz 1 verschieden sind, kann man $f(x)$ mit Hilfe von $f(x_\alpha)$ und $f(x_\beta)$ ausdrücken, und findet so

$$f(x) = k_1 f(x_\alpha) + k_2 f(x_\beta),$$

wo k_1 und k_2 nur von λ, μ, ν abhängen. In derselben Weise bekommt man

$$g(x) = k_1 g(x_\alpha) + k_2 g(x_\beta) =$$
$$= k_1 f(x_\alpha) + k_2 f(x_\beta) = f(x).$$

Hilfssatz 3 ist also bewiesen.

Wen nun a und b gegeben sind, so dass $a > b$, so definieren wir für alle x in $I_{a,b}$ eine reellwertige Funktion $\lambda_{a,b} = \lambda_{a,b}(x)$ durch die Beziehung

$$\lambda_{a,b} x_a + (1-\lambda_{a,b}) x_b \sim x.$$

Nach den Hilfssätzen 1 und 2 ist diese Definition eindeutig, und die Funktion $\lambda_{a,b}(x)$ ist auf $I_{a,b}$ monoton. Für befreundete x, y in $I_{a,b}$ hat man aber nach der Bedingung 3)

$$\mu x + (1-\mu) y \sim \mu [\lambda_{a,b}(x) x_a + (1-\lambda_{a,b}(x)) x_b] +$$
$$+ (1-\mu) [\lambda_{a,b}(y) x_a + (1-\lambda_{a,b}(y)) x_b] =$$
$$= [\mu\lambda_{a,b}(x) + (1-\mu)\lambda_{a,b}(y)] x_a + [1 - \mu\lambda_{a,b}(x) - (1-\mu)\lambda_{a,b}(y)] x_b,$$

und also

$$\lambda_{a,b} [\mu x + (1-\mu) y] = \mu\lambda_{a,b}(x) + (1-\mu)\lambda_{a,b}(y),$$

so dass $\lambda_{a,b}(x)$ auch linear auf $I_{a,b}$ ist.

Um den Beweis unseres Satzes abzuschliessen nehmen wir jetzt an es seien α und β fest gegeben in A, so dass $\alpha > \beta$. Es sei ferner x beliebig in X_2. Wir wählen dann a und b, so dass x, x_α und x_β alle zu $I_{a,b}$ gehören, was natürlich immer möglich ist. Setzen wir nun

$$f(x) = \frac{\lambda_{a,b}(x) - \lambda_{a,b}(x_\beta)}{\lambda_{a,b}(x_\alpha) - \lambda_{a,b}(x_\beta)},$$

so ist $f(x)$ offenbar auf $I_{a,b}$ monoton und linear. Aus Hilfssatz 3 folgt aber, da $f(x_\alpha) = 1$, $f(x_\beta) = 0$, dass $f(x)$ von der Wahl von a und b unabhängig ist. Also ist $f(x)$ für alle x in X_2 difiniert und hat die verlangten Eigenschaften.

Jede andere Funktion $g(x)$ mit denselben Eigenschaften ist in der Form $g(x) = k_1 f(x) + k_2$ mit konstanten k_1 und k_2 darstellbar. Wenn

man nämlich die Konstanten so bestimmt, dass die Gleichung für $x = x_\alpha$ und für $x = x_\beta$ stimmt, so bleibt sie nach Hilfssatz 3 für alle x gültig.

Поступила в редакцию
21.12.55

LITERATUR

[1] D. Blackwell und M. A. Girshick, Theory of Games and Statistical Decisions. New York, 1954.
[2] I. N. Herstein and J. Milnor. An axiomatic Approach to measurable Utility, Econometrica 21 (1953), S. 291.
[3] J. V. Neumann und O. Morgenstern, Theory of Games and Economic Behaviour, 2. Aufl., Princeton, 1947.

ТЕОРЕМА ОБ УПОРЯДОЧЕННЫХ МНОЖЕСТВАХ ВЕРОЯТНОСТНЫХ РАСПРЕДЕЛЕНИЙ

Г. КРАМЕР (СТОКГОЛЬМ)

(Резюме)

Пусть во множестве A — $\{a, b, c, \ldots\}$ установлено бинарное отношение порядка: для любых двух элементов имеет место хотя бы одно из соотношений:

$$a \geq b \quad (a \text{ не хуже, чем } b) \tag{1}$$
$$b \geq a \quad (b \text{ не хуже, чем } a) \tag{2}$$

Если выполнено (1), но не имеет места (2), то $a > b$ (a лучше, чем b).

Пусть $X_2 = \{x, y, z, \ldots\}$ множество всех распределений, каждое из которых сосредоточено не более чем на двух элементах множества A. Если отношение порядка для элементов множества A можно расширить на X_2, то, при некоторых простых условиях регулярности X_2 доказывается существование такой действительной функции $f(a)$, определенной на A, что для любых x, y из X_2 соотношение $x > y$ справедливо тогда и только тогда, когда

$$\mathbf{E}_x f(a) > \mathbf{E}_y f(a).$$

ТЕОРИЯ ВЕРОЯТНОСТЕЙ
Том I И ЕЕ ПРИМЕНЕНИЯ Выпуск 1
1956

МАРКОВСКИЕ ПРОЦЕССЫ И ПОЛУГРУППЫ ОПЕРАТОРОВ

Е. Б. ДЫНКИН

Задача этой работы—выяснить соотношения между различными полугруппами операторов и между различными инфинитезимальными операторами, соответствующими марковскому процессу, и изучить, при каких условиях эти операторы однозначно определяют марковский процесс. Упорядочение этих вопросов должно составить необходимую базу для более основательного исследования марковских процессов в [1].

Мы строим изложение таким образом, чтобы работу можно было читать без предварительного знакомства с теорией полугрупп операторов. Разработанные Э. Хиллом [2] и К. Иосидой [3] основы этой теории излагаются в § 1 в той форме и в той мере, какая нужна для изучения марковских процессов. В § 2 строится параллельная теория, возникающая если вместо сильной сходимости положить в основу слабую сходимость функционалов. Полезность такого подхода для теории марковских процессов убедительно показана В. Феллером в [4] и [5]. Своеобразие теории, рассмотренной в § 2, состоит в том, что вместо непрерывных функций от параметра t приходится иметь дело с функциями, непрерывными только справа. В § 3 рассматривается вопрос о том, при каких условиях марковский процесс можно восстановить по его инфинитезимальному оператору. В §§ 1—3 мы имеем дело с пространством B всех ограниченных измеримых по Борелю функций вместо пространства C непрерывных ограниченных функций, рассматривавшегося Феллером. Дополнительные вопросы, возникающие, если полугруппа рассматривается не во всем пространстве B, а в некотором его инвариантном подпространстве, обсуждаются в § 4.

С более общей точки зрения объект нашего изучения можно описать следующим образом. Имеется некоторое банаховское пространство L и в нем однопараметрическая полугруппа линейных операторов U_t, имеющих норму, не превосходящую единицы. Рассматривается сопряженная полугруппа $T_t = U^*_t$, действующая в пространстве $B = L^*$ всех линейных функционалов на L. Для нее можно строить инфинитезимальный оператор, отправляясь либо от сильной, либо от слабой сходимости в пространстве B (имеется в виду слабая сходимость функционалов). Изучение связи между этими операторами и вопроса о том, при каких условиях они определяют полугруппу U_t, и является предметом настоящей работы.

Заметим, что близкие вопросы рассматривались в работах В. Феллера [6] и Р. Филлипса [7]. Однако авторы этих работ стоят на более

абстрактной точке зрения и вводят предположения, значительно осложняющие исследование, но не имеющие значения для теоретико-вероятностных приложений.

§ 1. Введение

1. Пусть $\mathcal{E}$ — метрическое пространство, $\mathfrak{B}$ — σ-алгебра, порожденная открытыми множествами пространства $\mathcal{E}$. Однородный по времени марковский процесс в фазовом пространстве определяется функцией $\mathbf{P}(t, x, \Gamma)$ $(0 \leqslant t < \infty,\ x \in \mathcal{E},\ \Gamma \in \mathfrak{B})$, удовлетворяющей условиям:

1) При фиксированных t и Γ $\mathbf{P}(t, x, \Gamma)$ есть $\mathfrak{B}$-измеримая функция от x.

2) При фиксированных t и x $\mathbf{P}(t, x, \Gamma)$ есть вероятностная мера * на σ-алгебре $\mathfrak{B}$.

3) Для любых $s > 0$, $t > 0$

$$\mathbf{P}(s + t, x, \Gamma) = \int_{\mathcal{E}} \mathbf{P}(s, x, dy)\, \mathbf{P}(t, y, \Gamma).$$

Обозначим через L банаховское пространство всех счетно аддитивных функций на σ-алгебре $\mathfrak{B}$, имеющих ограниченную вариацию (за норму такой функции принимается ее вариация). Переходные вероятности $\mathbf{P}(t, x, \Gamma)$ определяют в L семейство линейных операторов

$$U_t \varphi(\Gamma) = \int_{\mathcal{E}} \mathbf{P}(s, x, \Gamma)\, \varphi(dx) \quad (\varphi \in L, t > 0). \tag{1}$$

При этом $\| U_t \varphi \| \leqslant \| \varphi \|$ и, в силу 3)

$$U_{s+t} = U_s U_t,$$

так что операторы U_t образуют сжимающую (contraction) полугруппу.

Обозначим через B банаховское пространство всех $\mathfrak{B}$-измеримых ограниченных функций на $\mathcal{E}$ с нормой

$$\| f \| = \sup_{x \in \mathcal{E}} | f(x) |$$

и положим

$$T_t f(x) = \int_{\mathcal{E}} \mathbf{P}(t, x, dy) f(y) \quad (f \in B, t \geqslant 0). \tag{2}$$

Операторы T_t также образуют сжимающую полугруппу:

$$T_{s+t} = T_s T_t \quad \| T_t f \| \leqslant \| f \|.$$

Пространство B можно рассматривать как пространство линейных функционалов на L:

$$(f, \varphi) = \int_{\mathcal{E}} f(x)\, \varphi(dx) \quad (f \in B,\ \varphi \in L). \tag{3}$$

---

* Не внося никаких осложнений в наши рассмотрения, мы можем ослабить условие 2) и предположить вместо равенства $\mathbf{P}(t, x, \mathcal{E}) = 1$ неравенство $\mathbf{P}(t, x, \mathcal{E}) \leqslant 1$.

При этом $(T_t f, \varphi) = (f, U_t \varphi)$, так что операторы T_t и U_t сопряжены. В силу этой простой связи между полугруппами T_t и U_t достаточно изучить одну из них. Поскольку при аналитическом изучении марковских процессов удобнее иметь дело с функциями, чем с мерами, мы сосредоточим наше внимание на полугруппе T_t.

В пространстве B мы будем рассматривать две сходимости; запись

$$s \lim_{n \to \infty} f_n = f$$

обозначает, что $\| f_n - f \| \to 0$. Запись

$$w \lim_{n \to \infty} f_n = f \tag{4}$$

обозначает, что при любом $x \in \mathfrak{X}$ $f_n(x) \to f(x)$ и $\| f_n \|$ ограничены. Сходимость s называется *сильной*, а сходимость w *слабой*. Она совпадает со слабой сходимостью функционалов, как ее обычно понимают в функциональном анализе, ибо (4) равносильно условию: $(f_n, \varphi) \to (f, \varphi)$ для всякого $\varphi \in L$. Очевидно, если существует $s \lim f_n$, то существует $w \lim f_n$ и $w \lim f_n = s \lim f_n$. Из формулы (3) видно, что

$$T_t [w \lim f_n] = w \lim [T_t f_n]. \tag{5}$$

Мы будем вести изложение в конкретных терминах, считая $\mathfrak{X}$ пространством измеримых функций, а T_t операторами, определенными формулой (2). Однако все, что мы делаем, распространяется без всяких изменений и на общий случай, когда B пространство линейных функционалов над любым банаховским пространством L, а T_t полугруппа, сопряженная произвольной сжимающей полугруппе линейных операторов U_t в L *.

§ 2. Инфинитезимальный оператор в сильной топологии

2. *Подпространство* B_0. Обозначим через B_0 множество всех векторов f из B, для которых $s \lim_{t \to 0} T_t f = f$. Легко видеть, что B_0 есть (замкнутое) подпространство пространства B. Отметим также, что для $f \in B_0$

$$s \lim_{t \to t_0} T_t f = T_{t_0} f. \tag{6}$$

Действительно, если $t \geqslant t_0$, то

$$\| T_t f - T_{t_0} f \| = \| T_{t_0} (T_{t-t_0} f - f) \| \leqslant \| T_{t-t_0} f - f \| \to 0,$$

если $t < t_0$, то

$$\| T_t f - T_{t_0} f \| \leqslant \| T_t (f - T_{t_0 - t} f) \| \leqslant \| f - T_{t_0 - t} f \| \to 0.$$

3. Пусть

$$s \lim_{h \to 0} \frac{T_h f - f}{h} = g \quad (f \in B, g \in B).$$

Тогда мы пишем $f \in D_A$, $g = Af$ и говорим, что вектор f принадлежит области определения оператора A, причем A переводит f в g. Легко ви-

* В немногих местах, где перенесение на абстрактный случай требует специальных пояснений, эти пояснения будут даны в сносках.

деть, что если $f_1, f_2 \in D_A$, то $c_1 f_1 + c_2 f_2 \in D_A$ (c_1, c_2 — произвольные числа) и $A(c_1 f_1 + c_2 f_2) = c_1 A f_1 + c_2 A f_2$. Таким образом, A линейный оператор (вообще говоря, неограниченный). Этот оператор называется *(сильным) инфинитезимальным оператором полугруппы* T_t.

Очевидно, $D_A \subseteq B_0$ и $A(D_A) \subseteq B_0$. В $n°6$ будет показано, что D_A всюду плотно в B_0.

4. Мы будем рассматривать функции f_t на числовом отрезке $\Delta = [a, b]$ со значениями из пространства B, другими словами, функции $f_t(x)$ от двух переменных $t \in \Delta, x \in \mathfrak{S}$ такие, что при любом t $f_t(x)$ ограниченная измеримая функция относительно x. Функцию f_t мы назовем *s-непрерывной*, если $s\lim\limits_{t \to t_0} f_t = f_{t_0}$, *s-дифференцируемой*, если существует

$$s\lim_{h \to 0} \frac{f_{t+h} - f_t}{h}, \tag{7}$$

и *s-интегрируемой*, если существует предел

$$s\lim_{\delta \to 0} \sum_{k=0}^{n} f_{t_k}(t_k - t_{k-1}), \tag{8}$$

где $a = t_0 < t_1 < \ldots < t_n = b$ и $\delta = \max\limits_{1 \leqslant k \leqslant n} |t_k - t_{k-1}|$. Очевидно, предел (7) совпадает с $\frac{df_t(x)}{dt}$, а предел (8) с $\int\limits_a^b f_t(x)\,dt$, причем оба предела представляют собой функции из B.

Определение интеграла распространяется обычным образом на случай, когда область интегрирования Δ бесконечна.

Отметим некоторые очевидные свойства интегралов:

1) Пусть функция f_t s-непрерывна на отрезке Δ. Тогда если отрезок Δ конечен, то она s-интегрируема на этом отрезке. Если отрезок Δ бесконечен, то для s-интегрируемости f_t достаточно, чтобы она мажорировалась по норме интегрируемой числовой функцией. Во всех случаях

$$\| \int\limits_{\Delta} f_t dt \| \leqslant \int\limits_{\Delta} \| f_t \|\, dt^*. \tag{9}$$

2) Если f_t s-интегрируема и T — ограниченный линейный оператор в B, то Tf_t также s-интегрируема и

$$\int\limits_a^b T f_t dt = T\left(\int\limits_a^b f_t\,dt\right). \tag{10}$$

3) Если f_t s-интегрируема в $[a, a+h]$ и s — непрерывна в a, то

$$s\lim_{h \to 0} \frac{1}{h} \int\limits_a^{a+h} f_t dt = f_a. \tag{11}$$

5. Для любых $t > 0$ и $h > 0$ имеем

$$T_t\left(\frac{T_h f - f}{h}\right) = \frac{T_t T_h f - T_t f}{h} = \frac{T_{t+h} f - T_t f}{h} = \frac{T_h T_t f - T_t f}{h}. \tag{12}$$

* Из s-непрерывности f_t следует непрерывность $\| f_t \|$

Если $f \in D_A$, то $s\lim\limits_{h\to 0} \dfrac{T_h f - f}{h} = Af$ и, следовательно, $s\lim T_t\left(\dfrac{T_h f - f}{h}\right) = T_t Af$. В силу (12) отсюда вытекает, что:

1) существует $s\lim \dfrac{T_{t+h}f - T_t f}{h} = \dfrac{d^+ T_t f}{dt}$,

2) $T_t f \in D_A$ и

$$\frac{d^+ T_t f}{dt} = AT_t f = T_t Af.$$

Далее, из соотношения

$$T_{t-h}\left(\frac{T_h f - f}{h}\right) = \frac{T_t f - T_{t-h} f}{h}$$

видно, что если $f \in D_A$, то $s\lim\limits_{h\to 0} \dfrac{T_t f - T_{t-h} f}{h} = T_t Af$. Поэтому $\dfrac{d^- T_t f}{dt}$ существует и равно $\dfrac{d^+ T_t f}{dt}$. Итак, если $f \in D_A$, то функция $T_t f$ s-дифференцируема и выполняется дифференциальное уравнение

$$\frac{dT_t f}{dt} = AT_t f = T_t Af. \tag{13}$$

6. Докажем, что D_A всюду плотно в B_0. Пусть $f \in B_0$. В силу (6) функция $T_t f$ s-непрерывна, и, следовательно, s-интегрируема на любом конечном отрезке. Положим

$$g_{a,b} = \int_a^b T_t f dt \quad (0 \leqslant a < b).$$

Используя (10), имеем

$$T_h g_{a,b} = \int_a^b T_{t+h} f dt = \int_{a+h}^{b+h} T_t f dt = g_{a,b} + \int_b^{b+h} T_t f dt - \int_a^{a+h} T_t f dt.$$

Отсюда, в силу (11)

$$s\lim_{n\to 0} \frac{T_h g_{a,b} - g_{a,b}}{h} = s\lim_{h\to 0}\left[\frac{1}{h}\int_b^{b+h} T_t f dt - \frac{1}{h}\int_a^{a+h} T_t f dt\right] = T_b f - T_b f.$$

Поэтому $g_{a,b} \in D_A$. Далее, согласно (11) $s\lim\limits_{b\to 0} \dfrac{g_{0,b}}{b} = f$.

Отсюда видно, это элементами из D_A можно аппроксимировать любой элемент $f \in B_0$.

7. *Резольвента.* Положим

$$F = R_\lambda f = \int_0^\infty e^{-\lambda t} T_t f dt \quad (\lambda > 0, f \in B_0). \tag{14}$$

Подинтегральная функция s-интегрируема, ибо она s-непрерывна и мажорируется по норме интегрируемой функцией $e^{-\lambda t}\|f\|$. Оператор R_λ очевидно линеен. Кроме того, он ограничен, ибо

$$\|F\| \leqslant \int_0^\infty e^{-\lambda t}\|f\| dt = \frac{\|f\|}{\lambda}.$$

Теорема 1. *Оператор $\lambda E - A$ отображает взаимно однозначно область D_A на B_0. Обратный оператор $(\lambda E - A)^{-1}$ совпадает с оператором R_λ, определенным формулой* (14).

Доказательство. Имеем

$$T_h F = \int_0^\infty e^{-\lambda t} T_{t+h} f dt = \int_h^\infty e^{-\lambda(t-h)} T_t f dt e^{-\lambda h} \int_h^\infty e^{-\lambda t} T_t f dt = e^{\lambda h}\left(F - \int_0^h e^{-\lambda t} T_t f dt\right).$$

Отсюда

$$\frac{T_h F - F}{h} = \frac{e^{\lambda h} - 1}{h} F - \frac{1}{h} e^{\lambda h} \int_0^h e^{-\lambda t} T_t f dt.$$

При $h \to 0$ первый член в правой части стремится к λF, второй член в силу (11) сходится к $-f$. Следовательно, $F \in D_A$ и

$$AF = \lambda F - f. \tag{15}$$

Отсюда видно, что $\lambda E - A$ отображает D_A на B_0.

Пусть $(\lambda E - A) F_1 = (\lambda E - A) F_2$. Тогда $g = F_1 - F_2$ удовлетворяет соотношению

$$Ag = \lambda g. \tag{16}$$

Из (13) и (16)

$$\frac{dT_t g}{dt} = \lambda T_t g$$

и, значит,

$$\frac{d(e^{-\lambda t} T_t g)}{dt} = 0. \tag{17}$$

Из (17), в силу того, что $g \in B_0$ и, следовательно, $s \lim_{t \to 0} T_t g = g$, имеем

$$e^{-\lambda t} T_t g = g. \tag{18}$$

Отсюда

$$\| g \| \leqslant e^{-\lambda t} \| g \|$$

и, стало быть, $\| g \| = 0$. Итак, отображение $\lambda E - A$ взаимно однозначно. Остается заметить, что согласно (15) $(\lambda E - A) R_\lambda f = f$, следовательно, $R_\lambda f = (\lambda F - A)^{-1} f$.

8. **Теорема 2.** *Если для двух полугрупп T_t и T'_t совпадают инфинитезимальные операторы, то $T_t f = T'_t f$ для всех $f \in B_0$ (пространство B_0 не зависит от того, по какой из двух данных полугрупп оно строится).*

Доказательство. Утверждение, записанное в скобках, вытекает из $n°6$. В силу теоремы 1 для полугрупп T_t и T'_t совпадают резольвенты, т. е. для любого $f \in B_0$ и $x \in \mathfrak{S}$

$$\int_0^\infty e^{-\lambda t} T_t f(x)\, dt = \int_0^\infty e^{-\lambda t} T'_t f(x)\, dt. \tag{19}$$

Функции $T_t f(x)$ и $T'_t f(x)$ суть непрерывные функции переменного t. По теореме единственности из теории преобразований Лапласа из (19) вытекает, что $T_t f(x) = T'_t f(x)$ при всех t*.

* В общем случае вместо $T_t f(x)$ надо было бы рассмотреть $(T_t f, \varphi)$, где $\varphi \in L$.

9. Теорема 3. *Пусть* $f \in D_A$. *Функция* $u_t = T_t f$ *является единственным решением уравнения*

$$\frac{du_t}{dt} = Au_t, \tag{20}$$

удовлетворяющим условиям:

а) u_t *s-дифференцируема и ее производная s-непрерывна.*

б) $\| u_t \| < ce^{kt}$ (*c и k постоянные*).

в) $s \lim\limits_{t \to 0} u_t = f$.

Доказательство. Согласно $n°5$ функция $u_t = T_t f$ удовлетворяет уравнению (20) и условию а). Она, очевидно, удовлетворяет условию $\| u_t \| \leqslant \| f \|$, так что в б) можно принять $c = \| f \|$, $k = 0$. Наконец, поскольку $f \in D_A \subseteq B_0$, то выполнено в).

Покажем теперь, что если u_t решение уравнения (20), удовлетворяющее условиям а), б) и условию $s \lim\limits_{t \to 0} u_t = 0$, то $u_t = 0$. Положим $v_t = e^{-\lambda t} u_t$ ($\lambda > k$). Из (20)

$$\frac{dv_t}{dt} = -\lambda e^{-\lambda t} u_t + e^{-\lambda t} \frac{du_t}{dt} = -\lambda v_t + Av_t = -(\lambda E - A) v_t.$$

Отсюда

$$v_t = R_\lambda \left(\frac{dv_t}{dt} \right).$$

Поскольку $\frac{dv_t}{dt}$ s-непрерывна и оператор R_λ ограничен, то в силу (10)

$$\int_0^t v_t dt = -R_\lambda \int_0^t \frac{dv_t}{dt} = -R_\lambda (v_t - v_0) = -R_\lambda v_t.$$

При $t \to \infty$ $\| v_t \| \to 0$ и, значит, $\| R_\lambda v_t \| \to 0$. Поэтому

$$\int_0^\infty v_t dt = \int_0^\infty e^{-\lambda t} u_t dt = 0$$

для всех $\lambda > k$. Отсюда следует, что $u_t = 0$.

§ 3. Инфинитезимальный оператор в слабой топологии

10. Отнесем f из B к $\tilde{B}$, если

$$w \lim_{t \to 0} T_t f = f. \tag{21}$$

Очевидно, если $f_1, f_2 \in B_0$, то $c_1 f_1 + c_2 f_2 \in \tilde{B}_0$. Очевидно также, что $\tilde{B}_0 \supseteq B_0$.

Докажем, что если $\| f_n - f \| \to 0$ и $f_n \in \tilde{B}_0$, то $f \in \tilde{B}_0$. Действительно, при любом $x \in \mathfrak{S}$

$$| T_t f(x) - f(x) | \leqslant | T_t f(x) - T_t f_n(x) | + | T_t f_n(x) - f_n(x) | + | f_n(x) - f(x) | \leqslant 2 \| f - f_n \| + | T_t f_n(x) - f_n(x) |.$$

Каково бы ни было $\varepsilon > 0$, можно выбрать n так, чтобы $\| f - f_n \| < \varepsilon$, а затем выбрать δ так, чтобы $| T_t f_n - f_n | < \varepsilon$ при $t < \delta$. Тогда

$|T_t f(x) - f(x)| < 3\varepsilon$. Отсюда видно, что $T_t f(x) \to f(x)$ при $t \to 0$. С другой стороны, $\| T_t f \| \leqslant \| f \|$. Следовательно, $w \lim\limits_{t \to +0} T_t f = f$.

Из (5) и (21) вытекает, что если $f \in \tilde{B}_0$, то $w \lim\limits_{t \to t_0 + 0} T_t f = T_{t_0} f$. Поэтому $\tilde{B}_0$ инвариантно относительно T_t и, если $f \in \tilde{B}_0$, то при любом x $T_t f(x)$ есть непрерывная справа функция относительно t $(t \geqslant 0)$ (непрерывной слева эта функция может и не быть).

Пусть

$$w \lim_{h \to 0} \frac{T_h f - f}{h} = g \quad (f \in \tilde{B}_0, g \in \tilde{B}_0). \tag{22}$$

Тогда мы пишем $f \in D_{\tilde{A}}$, $g = \tilde{A} f$. Оператор A мы будем называть *слабым инфинитезимальным оператором полугруппы* T_t. Очевидно, $D_A \subseteq D_{\tilde{A}}$ и для $f \in D_A$ $\tilde{A} f = A f$. Таким образом, оператор A является расширением оператора $A : \tilde{A} \supseteq A$. Заметим еще, что для $f \in D_{\tilde{A}}$ $\| \frac{T_t f - f}{t} \|$ ограничена и поэтому $\| T_t f - f \| \to 0$ при $t \to 0$, так что $D_{\tilde{A}} \subseteq B_0$.

Так же как в $n°5$, выводим, что если $f \in D_{\tilde{A}}$, то

$$\frac{d^+ T_t f}{dt} = A T_t f = T_t A f, \tag{23}$$

где

$$\frac{d^+ T_t f}{dt} = w \lim_{h \to +0} \frac{T_{t+h} f - T_t f}{h}.$$

11. *Интегрирование.* Пусть функция $f_t(x)$ $(t \in \Delta, x \in \mathcal{E})$ измерима по совокупности t, x * и пусть $\| f_t \| < c(t)$, где $c(t)$, суммируемая на Δ, числовая функция. Тогда интеграл

$$\int_\Delta f_t(x)\, dt$$

определен при каждом x и представляет собой измеримую ограниченную функцию $g(x)$ **. При этом

$$\| g \| \leqslant \int_\Delta c(t)\, dt.$$

Мы будем писать сокращенно

$$g = \int_\Delta f_t dt. \tag{24}$$

Заметим, что если φ произвольная вероятностная мера, определенная на σ-алгебре $\mathfrak{B}$, то по теореме Фубини

$$\int_{\mathcal{E}} g(x) \varphi(dx) = \int_{\mathcal{E}} \int_\Delta f_t(x)\, dt \varphi(dx) = \int_\Delta \left[\int_{\mathcal{E}} f_t(x) \varphi(dx) \right] dt.$$

---

* Под измеримостью по совокупности t и x здесь и далее понимается измеримость относительно произведения σ-алгебры всех измеримых по Лебегу множеств на прямой t на σ-алгебру $\mathfrak{B}$.

** В абстрактном случае мы потребуем, чтобы функция f_t была слабо измерима, т. е. чтобы функции (f_t, φ) для всякого $\varphi \in L$ была измерима относительно t. Тогда $g(\varphi) = \int_\Delta (f_t, \varphi)\, dt$ определяет линейный функционал на L, т. е. элемент g из B.

Полагая, в частности, $\varphi(\Gamma) = \mathbf{P}(h, y, \Gamma)$, имеем

$$T_h\left[\int_\Delta f_t dt\right] = \int_\Delta T_h f_t dt. \tag{25}$$

Отметим, наконец, что если $w\lim\limits_{t\to a+0} f_t = f$, то

$$w\lim_{h\to+0}\frac{1}{h}\int_a^{a+h} f_t dt = f. \tag{26}$$

12. Для того, чтобы двигаться дальше, нам придется наложить одно ограничение на переходные вероятности процесса *.

(I). При любом $\Gamma \in \mathfrak{B}$ функция $\mathbf{P}(t, x, \Gamma)$ измерима по совокупности t и x.

Из предположения (I) вытекает, что при любом $f \in B$ функция $T_t f(x)$ измерима относительно совокупности t и x. Поэтому интегралы $\int\limits_a^b T_t f dt$ и $\int\limits_0^\infty e^{-\lambda t} T_t f dt$ существуют в смысле $n°11$, и мы можем перенести на случай слабой топологии рассмотрения $n°n°6$—9.

Из рассмотрений $n°6$ явствует, что слабое замыкание $D_{\tilde{A}}$ содержит $\tilde{B}_0$. Поскольку $D_{\tilde{A}} \subseteq B_0 \subseteq \tilde{B}_0$ и сильное замыкание D_A равно B_0, то множества D_A, $D_{\tilde{A}}$, B_0 и $\tilde{B}_0$ имеют одно и то же слабое замыкание. Мы обозначим его через B_1.

Теорема 1 полностью сохраняет силу в топологии w. (В ее формулировке надо заменить A на $\tilde{A}$, D_A на $D_{\tilde{A}}$, B_0 на $\tilde{B}_0$). Единственное изменение, которое приходится внести в доказательство, относится к выводу соотношения (18) из (17) и обусловлено тем, что вместо уравнения (13) приходится пользоваться его ослабленной формой (23). Соотношение (17) заменяется на

$$\frac{d^+(e^{-\lambda t}T_t g)}{dt} = 0. \tag{27}$$

Но, поскольку $g \in D_{\tilde{A}} \subseteq B_0$, то функция $e^{-\lambda t}T_t g$ непрерывна и поэтому из (27) следует (18) **.

Заметим теперь, что если для двух полугрупп T_t, T'_t

$$T_t f = T'_t f$$

для всех $f \in B_0$, то в силу (5) это равенство сохраняет силу и для всех $f \in B_1$. Поэтому мы можем сформулировать следующий усиленный вариант теоремы 2:

Теорема 2′. *Если для двух полугрупп T_t и T'_t совпадают сильные или слабые инфинитезимальные операторы, то $T_t f = T'_t f$ для всех $f \in B_1$.*

* В абстрактном случае условие (I) заменяется следующим условием на полугруппу T_t (или u_t):

(I′) Для всякого $\varphi \in L$ функция $(T_t f, \varphi) = (f, U_t \varphi)$ измерима относительно t.

** См., напр., Ш. Ж. де ла Валле-Пуссен, Курс анализа бесконечно малых, т. 1, М.-Л., 1933, стр. 98.

13. Теорема 3 в слабом случае формулируется следующим образом:

Теорема 3′. *Пусть* $f \in D_{\widetilde{A}}$. *Функция* $u_t = T_t f$ *является единственным решением уравнения*

$$\frac{d^+u_t}{dt} = \widetilde{A}u_t, \tag{28}$$

удовлетворяющим условиям:

а) $u_t(x)$ *измерима по совокупности* t *и* x.

б) *При фиксированном* x $u_t(x)$ *непрерывна по* t, $\frac{d^+u_t(x)}{dx}$ *непрерывна справа по* t *и ограничена на любом конечном отрезке изменения* t.

в) $|u_t(x)| < ce^{kt}$ (*c и k постоянные*).

г) $w\lim\limits_{t\to 0} u_t = f$.

Доказательство. Принимая во внимание уравнение (23), предположение (I) и включения $D_{\widetilde{A}} \subseteq B_0 \subseteq \widetilde{B}_0$, легко устанавливаем, что функция $T_t f$ удовлетворяет условию (28) и условиям а) — г).

Предположим теперь, что u_t решение уравнения (28), удовлетворяющее условиям б) — в) и условию $w\lim\limits_{t\to 0} u_t = 0$.

Покажем, что $u_t = 0$. Так же как и при доказательстве теоремы 3, выводим, что функция $v_t = e^{-\lambda t}u_t$ удовлетворяет соотношению

$$v_t = -R_\lambda\left(\frac{d^+v_t}{dt}\right) = -\int_0^\infty e^{-\lambda s}T_s\left(\frac{d^+v_t}{dt}\right)ds,$$

отсюда

$$\int_0^t v_r dr = -\int_0^t\left[\int_0^\infty e^{-\lambda s}T_s\left(\frac{d^+v_r}{dr}\right)ds\right]dr.$$

Из предположений (I) и б) следует, что подинтегральная функция справа измерима относительно совокупности s, r. В силу в) она суммируема. Поэтому законно применение теоремы Фубини. Изменяя порядок интегрирования и принимая во внимание (25), имеем

$$\int_0^t v_r dr = -\int_0^\infty\left[e^{-\lambda s}T_s\int_0^t\frac{d^+v_r}{dr}\,dr\right]ds. \tag{29}$$

Функция $v_r - \int_0^t \frac{d^+v_r}{dr}\,dr$ непрерывна и ее правая производная равна нулю. Поэтому эта функция равна постоянной. Но при $t = 0$ она принимает значение 0. Следовательно,

$$\int_0^t \frac{d^+v_r}{dr}\,dr = v_t. \tag{30}$$

Подставляя (30) в (29), получаем

$$\int_0^t v_t dt = -R_\lambda v_t,$$

после чего доказательство завершается так же, как и доказательство теоремы 3.

§ 4. Нормальные марковские процессы

14. Условимся называть марковский процесс *нормальным*, если выполнено условие (I) и условие

(N). Для всякого $x \in \mathcal{E}$ и любой окрестности U точки x $\mathbf{P}(t, x, U) \to 1$ при $t \to 0$.

Нашей целью является доказательство следующей теоремы:

Теорема 4. *Нормальный марковский процесс однозначно определяется своим инфинитезимальным оператором (как сильным, так и слабым). Точнее, если инфинитезимальные операторы двух марковских процессов совпадают и если хотя бы один из этих процессов нормален, то совпадают переходные вероятности:*

$$\mathbf{P}(t, x, \Gamma) = \mathbf{P}'(t, x, \Gamma)$$

для всех $x \in E$, $\Gamma \in \mathfrak{B}$.

Предварительно докажем лемму.

Лемма. *Если выполнено условие* (N), *то* $\widetilde{B}_0$ *содержит все непрерывные ограниченные функции.*

Доказательство леммы. Пусть $f(x)$ непрерывная ограниченная функция, U — некоторая окрестность точки. Имеем

$$|T_t f(x) - f(x)| \leqslant \int_U \mathbf{P}(t, x, dy)\,|f(y) - f(x)| +$$

$$+ \int_{\mathcal{E} \setminus U} \mathbf{P}(t, x, dy)\,|f(y) - f(x)| \leqslant \sup_{y \in U} |f(y) - f(x)| +$$

$$+ 2\,\|f\|\,[1 - \mathbf{P}(t, x, U)].$$

Пусть ε—любое положительное число. Выберем окрестность U так, чтобы $\sup_{y \in U} |f(y) - f(x)| < \varepsilon/2$. В силу условия б) найдется $\delta > 0$ такое, что

$1 - \mathbf{P}(t, x, U) < \frac{\varepsilon}{4\,\|f\|}$ при $t < \delta$. Тогда $|T_t f(x) - f(x)|$ будет меньше ε. Итак, при любом x $T_t f(x)$ сходится к $f(x)$. С другой стороны, $\|T_t f\|$ ограничены числом $\|f\|$. Следовательно, $w \lim_{t \to 0} T_t f = f$, $f \in \widetilde{B}_0$.

Доказательство теоремы 4. Согласно лемме все непрерывные ограниченные функции входят в $\widetilde{B}_0$ и, следовательно, входят в B_1. Но известно (см., например, [8], стр. 249), что множество функций, замкнутое относительно w-сходимости и содержащее все непрерывные ограниченные функции, содержит и все ограниченные функции, измеримые по Борелю. Поэтому $B_1 = B$. Утверждение теоремы 4 вытекает теперь из теоремы 2.

§ 5. Инфинитезимальные операторы в инвариантном пространстве

15. Часто бывает удобно рассматривать полугруппу T_t не во всем пространстве B, а в некотором инвариантном полупространстве H. Собственно говоря, и в предыдущих параграфах полугруппа T_t рассматривалась не во всем пространстве B, в подпространствах B_0 или $\widetilde{B}_0$. Но подпространство H может выбираться и по другому принципу. Весьма

удобно, например, иметь дело с пространством C всех непрерывных ограниченных функций. Разумеется, не для всякого процесса это пространство инвариантно относительно T_t, однако класс процессов, для которых $T_t C \subseteq C$, весьма важен и включает в себя наиболее интересные марковские процессы. Этот класс процессов изучался В. Феллером в [5] и мы будем называть эти процессы феллеровскими.

Возвращаясь к общему случаю, условимся называть *инфинитезимальными операторами (сильным и слабым) процесса в инвариантном подпространстве* H операторы, определенные, соответственно, формулами (7) и (22) и дополнительным условием: $f,\ g \in H$. Мы будем обозначать эти операторы через A_H и $\tilde{A}_H$, а их области определения D_{A_H} и $D_{\tilde{A}_H}$. Очевидно, $A_H \subseteq A$, $\tilde{A}_H \subseteq \tilde{A}$ и $A_H \subseteq \tilde{A}_H$. Положим $H_0 = H \cap B_0$, $\tilde{H}_0 = H \cap \tilde{B}_0$, и обозначим через H_1 слабое замыкание H_0 (в B).

К сильному оператору A_H, очевидно, полностью применимы теоремы 1, 2, 2′ и 3. Нужно только заменить в их формулировках и доказательствах B_0 на H_0, B_1 на H_1. В случае слабого оператора требуется одна дополнительная оговорка. Определенный в $n°$ 11 интеграл $\int_\Delta f_t\,dt$ может не принадлежать к H, хотя $f_t \in H$ при каждом значении t. Поэтому в общем случае нельзя гарантировать, что $R_\lambda H_0 \subseteq H$. Чтобы перенести результаты § 2 на оператор A_H, нужны дополнительные предположения. Достаточно, например, предположить, что для любого $f \in H$, любого отрезка $[a,\ b]$ $(0 < a < b < \infty)$ и любой непрерывной на отрезке $[a,\ b]$ функции $c(t)$ $\int_a^b c(t)\,T_t f\,dt$ есть элемент из H. Для феллеровских процессов и для $H = C$ это условие всегда выполнено. Оно выполнено и тогда, когда функция $T_t f$ s-непрерывна на любом отрезке $[a,\ b]$ $(0 < a < b < \infty)$ (для этого достаточно, чтобы выполнялось условие (I) и чтобы H было сепарабельно (см. [2]).

Теорема 2′, примененная к операторам A_H и $\tilde{A}_H$, показывает, что каждый из этих операторов определяет полугруппу T_t в пространстве H_1. Если слабое замыкание H равно B, то $H_1 = B_1$. В силу $n°$ 14 для нормального процесса $B_1 = B$. Следовательно, если слабое замыкание H равно B, то каждый нормальный процесс однозначно восстанавливается как по оператору A_H, так и по оператору $\tilde{A}_H$. Все это применимо, в частности, к случаю $H = C$, ибо, как уже отмечалось в $n°$ 14, слабое замыкание C совпадает с B.

16. Теорема 5. *Для нормального феллеровского процесса* $\tilde{C}_0 = C$. *Если кроме того пространство* $\mathcal{E}$ *компактно, то* $C_0 = \tilde{C}_0 = C$ *и* $A_C = \tilde{A}_C$.

Доказательство. Первая часть теоремы прямо следует из леммы 1. Далее, если $\mathcal{E}$ компактно, то пространство линейных функционалов на C совпадает с L (пространством счетно аддитивных функций ограниченной вариации на σ-алгебре $\mathfrak{B}$) и, в силу равенства $\tilde{C}_0 = C$, для любого $f \in C$ и любого линейного функционала l на C $l(T_t f) \to l(f)$ при $t \to 0$. Отсюда вытекает (см. [2], теорема 9. 2. 2), что при любых $f \in C$, $t_0 > 0$

$$\| T_t f - T_{t_0} f \| \to 0. \tag{31}$$

Предположим, что $f \overline{\in} C$, но $f \overline{\in} C_0$. Тогда по теореме Хана-Банаха (см. напр., [9] стр. 107) найдется линейный функционал l такой, что $l(f) = 1$, $l(g) = 0$ для $g \in C_0$. В силу (31) при любом $t_0 > 0$ $T_{t_0} f \in C_0$ и, следовательно, $l(T_{t_0} f) = 0$. Мы пришли к противоречию с тем, что $w \lim_{t_0 \to 0} T_{t_0} = f$ и, стало быть, $l(T_{t_0} f) \to l(f)$. Полученное противоречие доказывает, что в действительности $C_0 = C = \bar{C}_0$. Поскольку R_λ отображает взаимно однозначно $\bar{C}_0$ на $D_{\bar{A}_C}$ и C_0 на D_{A_C}, то из равенства $C_0 = \bar{C}_0$ вытекает, что $D_{\bar{A}_C} = D_{A_C}$ и $\bar{A}_C = A_C$.

Поступила в редакцию
14. 12. 55

ЛИТЕРАТУРА

[1] Е. Б. Дынкин, Инфинитезимальные операторы марковских процессов. 1. Теория вероятностей и ее применения, № 1 (1956).
[2] Э. Хилл, Функциональный анализ и полугруппы, ИИЛ, М. 1951.
[3] K. Yosida, On the differentiability and the representation of one-parameter semi-group of linear operators. Journ. Math. Soc. Japan, 1 (1948), 15—21.
[4] W. Feller, Diffusion processes in one-dimension, Trans. of Amer. Math. Soc. 77 : 1 (1954), 1—31.
[5] W. Feller, The general diffusion operator and positivity preserving semi-groups in one dimension, Annals of Math. 60 : 3 (1954), 417—436.
[6] W. Feller, Semi-groups of transformations in general weak topologies, Annals of Math., 57 : 2 (1953), 287—308.
[7] R. S. Phillips, The adjoint semi-group, Pacific J. Math., 5, 2 (1955), 269—283.
[8] Хаусдорф, Теория множеств, М. — Л., 1937.
[9] А. Н. Колмогоров и С. В. Фомин, Элементы теории функций и функционального анализа, М., 1954.

MARKOV PROCESSES AND SEMI-GROUPS OF OPERATORS

E. B. DYNKIN (MOSCOW)

(Summary)

In this paper the relations between various semi-groups of operators and between various infinitesimal operators connected with a homogeneous in t Markov process are investigated. General conditions are established under which the Markov process is determined by corresponding infinitesimal operator.

Let U_t be a semi-group of linear operators in the Banach space L such that $\| U_t \| \leqslant 1$. Let $T_t = U_t$ be an adjoint semi-group in the conjugate space $B = L^*$. More abstractly the main object of this paper can be characterized as the study of semi-groups T_t and its infinitesimal operators in strong and week topologies of space B.

ТЕОРИЯ ВЕРОЯТНОСТЕЙ
Том I И ЕЕ ПРИМЕНЕНИЯ *Выпуск 1*
1956

ИНФИНИТЕЗИМАЛЬНЫЕ ОПЕРАТОРЫ МАРКОВСКИХ ПРОЦЕССОВ

Е. Б. ДЫНКИН

В 1931 г. А. Н. Колмогоров показал [9], что широкий класс одномерных марковских процессов описывается дифференциальными уравнениями вида

$$\frac{\partial u}{\partial t} = a\,\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + b\,\frac{\partial u}{\partial x}. \tag{I}$$

Работа А. Н. Колмогорова оставляла открытым вопрос о том, существуют ли одномерные марковские процессы, описываемые дифференциальными уравнениями

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \mathfrak{A}\,u, \tag{II}$$

где $\mathfrak{A}$ — дифференциальный оператор порядка более высокого, чем 2. Отдельные исследователи пытались выводить подобные уравнения более высоких порядков, отправляясь от тех или иных предположений относительно вероятностей перехода. Однако эти попытки имели весьма сомнительный характер, поскольку никем не были построены примеры, подтверждающие, что такие процессы в самом деле могут существовать.

Вопрос был полностью решен в 1954—1955 году работами В. Феллера, ([11], [12]), который показал, что одномерный процесс с непрерывными траекториями всегда задается уравнением (II), где $\mathfrak{A}$ представляет собой обобщенную вторую производную.

Чисто аналитический метод Феллера существенно связан с одномерным характером задачи и его трудно перенести на процессы, действующие в пространстве двух и более измерений.

В настоящей работе развивается другой метод, основанный на рассмотрении вероятностных свойств траекторий процесса. Этот метод одинаково применим как к одномерному, так и к многомерному случаю и позволяет доказать, что непрерывный марковский процесс в пространстве любого числа измерений определяется уравнением (II), где $\mathfrak{A}$ — обобщенный эллиптической дифференциальный оператор второго порядка. Метод применим не только к непрерывным процессам, но и к любым марковским процессам, траектории которых непрерывны справа.

В работах Феллера предполагается, что полугруппа операторов, соответствующая марковскому процессу, переводит непрерывные функции в

непрерывные. Класс процессов, который выделяется этим условием, действительно весьма важен. Мы называем эти процессы феллеровскими. Однако наш метод применим к более широкому классу процессов, к процессам, которые мы называем строго марковскими. Обычное определение марковского процесса требует, чтобы течение процесса после момента t не зависело от его течения до момента t при условии, что задано состояние системы в момент t. Мы называем процесс строго марковским, если это условие выполнено не только для постоянного, но и для случайного, но «не зависящего от будущего» момента t. Все феллеровские процессы являются строго марковскими (см. [6]), но обратное утверждение неверно.

Метод, которым мы пользуемся, применим и к нефеллеровским строго марковским процессам.

Работа начинается с вводного параграфа, в котором кратко формулируются основные факты о марковских и строго марковских процессах и соответствующих им полугруппах операторов. При этом мы опираемся на результаты работ [5] и [6]. Основной метод вычисления инфинитезимальных операторов марковских процессов излагается в § 2. В § 3 изучаются феллеровские процессы. Оператор $\mathfrak{A}$, который строится в этом параграфе, играет в общем случае ту же роль, какую для диффузионных процессов играет дифференциальный оператор в правой части уравнения (1), а для процессов со счетным множеством состояний — матрица плотностей вероятностей перехода. Для того чтобы определить марковский процесс, кроме оператора $\mathfrak{A}$, вообще говоря, нужно задать еще некоторые дополнительные условия: граничные условия в случае диффузионного процесса, распределение вероятностей в момент наклонения скачков—в случае процесса со счетным множеством состояний и т. п. На языке теории полугрупп это означает, что в общем случае инфинитезимальный оператор A марковского процесса является некоторым сужением оператора $\mathfrak{A}$ (см. теорему 4). Однако доказывается (теорема 5), что если множество состояний компактно, то $\mathfrak{A} = A$. В § 4 изучаются феллеровские процессы с непрерывными траекториями. Показывается, что в этом случае оператор $\mathfrak{A}$, построенный в § 3, представляет собой естественное обобщение эллиптических дифференциальных операторов второго порядка.

Более подробно рассматриваются непрерывные феллеровские процессы на прямой и показывается, что для таких процессов оператор $\mathfrak{A}$ сводится к феллеровской обобщенной второй производной. При этом выясняется теоретико-вероятностный смысл двух функций, по которым строится обобщенная производная. В § 5 рассматриваются некоторые разрывные процессы *.

Опираясь на результаты настоящей работы, можно дать классификацию всех одномерных строго марковских процессов (в том числе и не являющихся феллеровскими) *. Формулировки относящихся сюда результатов были опубликованы в [8]. Доказательство этих результатов будет дано в специальной статье.

---

* Часть результатов настоящей работы опубликована без подробных доказательств в [7].

§ 1. Введение

1. Пусть $x(t, \omega)$ — функция действительного переменного $t (0 \leqslant t < +\infty)$ и точки ω вспомогательного «пространства элементарных событий» Ω, принимающая значения из метрического пространства $\mathcal{E}$. Обозначим через $\mathfrak{B}$ σ-алгебру, порожденную открытыми множествами пространства $\mathcal{E}$, через $\mathfrak{B}'$ σ-алгебру, порожденную интервалами на полупрямой $0 \leqslant t < +\infty$ и через $\mathfrak{M}$ σ-алгебру подмножеств пространства Ω, порожденную множествами $\{x(t, \omega) \in \Gamma\}$ $(t \geqslant 0, \Gamma \in \mathfrak{B})$. Предположим, что на $\mathfrak{M}$ задано семейство вероятностных мер $\mathbf{P}_x (x \in \mathcal{E})$, причем $\mathbf{P}_x \{x(0, \omega) = x\} = 1$ и для любого $\Gamma \in \mathfrak{B}$ $\mathbf{P}_x \{x(t, \omega) \in \Gamma\}$ есть $\mathfrak{B} \times \mathfrak{B}'$ — измеримая функция t и x. Наконец, предположим, что при любом $\omega \in \Omega$ функция $x(t, \omega)$ есть непрерывная справа функция. Если выполнены все эти предположения, то мы будем говорить, что в пространстве $\mathcal{E}$ задан непрерывный справа случайный процесс $x(t, \omega)$.

Пусть $\zeta(\omega)$ $\mathfrak{M}$-измеримая функция на Ω. Условимся обозначать через $\mathbf{M}_x \zeta$ интеграл $\int\limits_{\Omega} \zeta(\omega) \mathbf{P}_x(d\omega)$.

Заметим, что функция $x(t, \omega)$ измерима относительно $\mathfrak{B} \times \mathfrak{B}'$. В самом деле, положим $x_n(t, \omega) = x\left(\frac{k+1}{n}, \omega\right)$ для $\frac{k}{n} \leqslant t < \frac{k+1}{n} (k = 0, 1, 2, \ldots)$. Функции $x_n(t, \omega)$ измеримы и $x(t, \omega) = \lim\limits_{n \to \infty} x_n(t, \omega)$.

Заметим, далее, что для любой окрестности U любой точки x

$$\lim_{t \to 0} \mathbf{P}_x \{x(t) \in U\} = 1. \tag{1}$$

Обозначим через $\mathfrak{M}_t$ σ-алгебру, порожденную множествами $\{x(u, \omega) \in \Gamma\} (0 \leqslant u \leqslant t, \Gamma \in \mathfrak{B})$. Будем говорить, что неотрицательная случайная величина $\tau = \tau(\omega)$ не зависит от будущего, если для любого t множество $\{\tau(\omega) \leqslant t\}$ принадлежит σ-алгебре $\mathfrak{M}_t$. Множества $A \in \mathfrak{M}$, для которых при любом t $\{\tau(\omega) \leqslant t\} \cap A \in \mathfrak{M}$, образуют σ-алгебру, которую мы будем обозначать через $\mathfrak{M}_\tau$. Это обозначение согласовано с предыдущим: если случайная величина τ равна постоянной t, то $\mathfrak{M}_\tau$ совпадает с $\mathfrak{M}_t$. Условные вероятности относительно σ-алгебры $\mathfrak{M}_\tau$ будут обозначаться символом $\mathbf{P}(- \mid x(u)_{u \leqslant \tau})$ *.

Случайный процесс называется *марковским* **, если для любой положительной константы τ и для любых $\Gamma_1, \ldots, \Gamma_n \in \mathfrak{B}, 0 \leqslant t_1 < t_2 < \ldots < t_n$ с вероятностью единица

$$\mathbf{P}(x(\tau + t_1) \in \Gamma_1, \ldots, x(\tau + t_n) \in \Gamma_n \mid x(u)_{u \leqslant \tau}) = \mathbf{P}_{x(\tau)}(x(t_1) \in \Gamma_1, \ldots, x(t_n) \in \Gamma_n). \tag{2}$$

Если это условие выполняется не только для всякой постоянной, но и для всякой случайной величины $\tau = \tau(\omega)$, не зависящей от будущего, то мы называем случайный процесс *строго марковским*.

---

* Определения и свойства условных вероятностей и условных математических ожиданий относительно σ-алгебры см. в [2]. Мы опускаем индекс x в обозначении $\mathbf{P}_x(A \mid B)$, если эта вероятность не зависит от x.

** Следовало бы прибавить: «однородным по времени». Однако, поскольку в настоящей работе рассматриваются только однородные по времени процессы, специальные указания на однородность будут опускаться.

Соотношения между марковскими и строго марковскими процессами изучаются в [6]. В частности там доказано, что непрерывный справа марковский процесс является строго марковским, если $g(x) = \mathbf{M}_x f[x(t)]$ есть непрерывная функция x, какова бы ни была непрерывная ограниченная функция $f(x)$.

Придадим условию строгой марковости (2) форму, которая будет нам удобна для использования в дальнейшем.

Обозначим через Ω_τ множество всех ω, для которых $\tau(\omega) < +\infty$ (Для функции $\tau = \tau(\omega)$, кроме конечных значений, допускается значение $+\infty$). Определим гомоморфизм θ_τ σ-алгебры $\mathfrak{M}$ в себя условием: если $A = \{x(t, \omega) \in \Gamma\}$ $(t \geqslant 0,\ \Gamma \in \mathfrak{B})$, то $\theta_\tau A = \Omega_\tau \cap \{x[\tau(\omega)+t,\ \omega] \in \Gamma\}$. Пусть $\xi(\omega)$ и $\eta(\omega)$ две $\mathfrak{M}$-измеримые функции. Будем писать $\eta = \theta_\tau \xi$, если $\theta_\tau\{\xi(\omega) = c\} = \Omega_\tau \cap \{\eta(\omega) = c\}$ для любого c. (Очевидно, функция η определяется по ξ на множестве Ω_τ, но остается неопределенной вне Ω_τ).

Покажем, что если $x(t, \omega)$ строго марковский процесс и τ — случайная величина, не зависящая от будущего, то, каковы бы ни были $A \in \mathfrak{M}_\tau$ $(A \subseteq \Omega_\tau)$ и $B \in \mathfrak{M}$,

$$\mathbf{P}_x(A \cap \theta_\tau B) = \int_A \mathbf{P}_{x(\tau)}(B)\, \mathbf{P}_x(d\omega); \tag{3}$$

каковы бы ни были $\mathfrak{M}_\tau$-измеримая функция $\xi(\omega)$ и $\mathfrak{M}$-измеримая функция $\zeta(\omega)$, если $\mathbf{P}_x\{\xi > 0,\ \tau = \infty\} = 0$, то

$$\mathbf{M}_x[\xi \theta_\tau \zeta] = \mathbf{M}_x[\xi \mathbf{M}_{x(\tau)} \zeta]\ *. \tag{4}$$

Для доказательства формулы (3) достаточно заметить, что левая и правая части этой формулы являются счетно-аддитивными функциями множества B и если $B = \{x(t_1) \in \Gamma_1, \ldots, x(t_n) \in \Gamma_n\}$ $(0 \leqslant t_1 < \ldots < t_n$, $\Gamma_1, \ldots, \Gamma_n \in \mathfrak{B})$, то (3) равносильно (2) по определению условной вероятности. Чтобы вывести теперь формулу (4), заметим, что: а) если ξ и ζ суть характеристические функции каких-нибудь множеств, то (4) переходит в (3); б) обе части формулы (4) зависят линейно от ξ и ζ; в) если формула (4) выполняется для каких-нибудь функций ξ_n, ζ_n, причем $\xi_1 \leqslant \xi_2 \leqslant \ldots$, $\zeta_1 \leqslant \zeta_2 \leqslant \ldots$, то она выполняется и для предельных функций $\lim \xi_n$, $\lim \zeta_n$. Если процесс не является строго марковским, но является марковским, то формулы (3) и (4) выполняются для $\tau = \text{const}$.

2. Обозначим через B банаховское пространство $\mathfrak{B}$-измеримых ограниченных функций на $\mathcal{E}$ с нормой $\| f \| = \sup\limits_{x \in E} | f(x) |$ и положим

$$T_t f(x) = \int_{\Omega} f[x(t,\ \omega)]\, \mathbf{P}_x(d\omega) = \mathbf{M}_x f[x(t)]. \tag{5}$$

Эта формула определяет однопараметрическое семейство линейных операторов в пространстве $\mathcal{E}$, причем $\| T_t f \| \leqslant \| f \|$. Если процесс $x(t, \omega)$ марковский, то для любых $s \geqslant 0$, $t \geqslant 0$

$$T_{s+t} = T_s T_t,$$

так что операторы T_t образуют сжимающую полугруппу.

Пусть f_n, $f \in B$. Мы пишем $f = s\lim f_n$, если $\| f_n - f \| \to 0$, и $f = w\lim f_n$, если $f_n(x) \to f(x)$ при любом $x \in \mathscr{E}$ и $\| f_n \|$ ограничены. Множество всех $f \in B$, для которых $s\lim\limits_{t\to 0} T_t f = f$ обозначается через B_0. Множество всех $f \in B$, для которых $w\lim\limits_{t\to 0} T_t f = f$, обозначается $\tilde{B}_0$. Если

$$g(x) = s\lim_{t\to 0} \frac{T_t f(x) - f(x)}{t} \quad (f,\ g \in B_0), \tag{6}$$

то будем писать $f \in D_A$, $Af = g$. Если

$$g(x) = w\lim_{t\to 0} \frac{T_t f(x) - f(x)}{t} \quad (f,\ g \in \tilde{B}_0), \tag{7}$$

то будем писать $f \in D_{\tilde{A}}$, $\tilde{A}f = g$. Операторы A и $\tilde{A}$ называются *инфинитезимальными операторами марковского процесса: A — сильным, $\tilde{A}$ — слабым.*

Семейство ограниченных линейных операторов R_λ ($\lambda > 0$), определенное формулой

$$R_\lambda h(x) = \int_0^\infty e^{-\lambda t} T_t h(x)\, dt \quad (h \in B), \tag{8}$$

называется *резольвентой полугруппы* T_t.

Имеют место следующие основные факты (см. [5]):

А. Непрерывный справа марковский процесс однозначно определяется своим инфинитезимальным оператором, как сильным, так и слабым (это значит, что по любому из операторов A или $\tilde{A}$ однозначно восстанавливается семейство вероятностных мер $\mathbf{P}_x$ в пространстве Ω).

Б. Имеют место включения:

$$B_0 \subseteq \tilde{B}_0,\ A \subseteq \tilde{A}$$

(последнее означает, что $D_A \subseteq D_{\tilde{A}}$ и, если $f \in D_A$, то $Af = \tilde{A}f$).

В. При любом $\lambda > 0$ оператор $\lambda E - A$ отображает взаимно однозначно D_A на B_0. Оператор $\lambda E - \tilde{A}$ отображает взаимно однозначно $D_{\tilde{A}}$ на $\tilde{B}_0$. Оператор R_λ совпадает на B_0 с $(\lambda E - A)^{-1}$ и на $\tilde{B}_0$ с $(\lambda E - \tilde{A})^{-1}$.

§ 2. Резольвента и инфинитезимальные операторы строго марковских процессов

3. Сопоставляя формулы (5) и (8), находим

$$R_\lambda h(x) = \int_0^\infty \int_\Omega e^{-\lambda t} h[x(t,\ \omega)]\, \mathbf{P}_x(d\omega)\, dt =$$

$$= \int_\Omega \int_0^\infty e^{-\lambda t} h\ [x(t,\ \omega)]\ \mathbf{P}_x(d\omega)\, dt\ = \mathbf{M}_x \int_0^\infty e^{-\lambda t} h[x(t)]\, dt. \tag{9}$$

(изменение порядка интегрирования законно, так как подинтегральная функция измерима и абсолютно интегрируема).

Теорема 1. *Пусть $x(t, \omega)$ — строго марковский непрерывный справа процесс. Пусть $\tau = \tau(\omega)$ — случайная величина, не зависящая от будущего, и пусть $f(x) = R_\lambda h(x)$ $(h \in B,\ \lambda > 0)$. Тогда*

$$\mathbf{M}_x \{e^{-\lambda\tau} f[x(\tau)]\} - f(x) = -\mathbf{M}_x \int_0^\tau e^{-\lambda t} h[x(t)]\, dt. \tag{10}$$

Доказательство. В силу (9)

$$f(x) = \mathbf{M}_x \int_0^\tau e^{-\lambda t} h[x(t)]\, dt + \mathbf{M}_x \int_\tau^\infty e^{-\lambda t} h[x(t)]\, dt. \tag{11}$$

Заменяя переменную интегрирования, имеем

$$\int_\tau^\infty e^{-\lambda t} h[x(t)]\, dt =$$

$$= e^{-\lambda\tau} \int_0^\infty e^{-\lambda s} h[x(s+\tau)]\, ds = e^{-\lambda\tau} \theta_\tau \left[\int_0^\infty e^{-\lambda s} h[x(s)]\, ds\right]. \tag{12}$$

Поскольку $e^{-\lambda\tau}$ измерима относительно $\mathfrak{M}_\tau$ и $\mathbf{P}_x\{e^{-\lambda\tau} > 0,\ \tau = \infty\} = 0$, то по формуле (4)

$$\mathbf{M}_x \left\{e^{-\lambda\tau} \theta_\tau \left[\int_0^\infty e^{-\lambda s} h[x(s)]\, ds\right]\right\} =$$

$$= \mathbf{M}_x \left\{e^{-\lambda\tau} \mathbf{M}_{x(\tau)} \left[\int_0^\infty e^{-\lambda s} h[x(s)]\, ds\right]\right\} = \mathbf{M}_x \{e^{-\lambda\tau} f[x(\tau)]\}. \tag{13}$$

Сопоставляя формулы (11), (12), (13), получаем (10).

Теорема 2. *Пусть $x(t)$ — непрерывный справа строго марковский процесс, τ — случайная величина, не зависящая от будущего и такая, что $\mathbf{M}_x\tau < \infty$. Пусть $\tilde{A}$ слабый* инфинитезимальный оператор процесса $x(t)$ и $\tilde{A}f = g$. Тогда*

$$\mathbf{M}_x f[x(\tau)] - f(x) = \mathbf{M}_x \int_0^\tau g[x(t)]\, dt. \tag{14}$$

Доказательство. Положим $h_\lambda = \lambda f - g$. В силу $n^\circ 2$, B), $R_\lambda h_\lambda = f$ и, по теореме 1, $\mathbf{M}_x \{e^{-\lambda\tau} f[x(\tau)]\} - f(x) = -\mathbf{M}_x \int_0^\tau e^{-\lambda t} h_\lambda[x(t)]\, dt$. Переходя к пределу при $\lambda \to 0$, получим формулу (14).

4. Пусть U — любое открытое множество в $\mathscr{E}$. Обозначим через τ_U точную нижнюю грань всех моментов времени t, для которых расстояние отрезка траектории $x(s)$ $(0 \leqslant s \leqslant t)$ от множества $\mathscr{E} \setminus U$ равно нулю. Из непрерывности справа $x(s)$ следует, что эта нижняя грань достигается, так что τ_U есть первый момент, когда расстояние траектории $x(s)$ $(0 \leqslant s \leqslant t)$ от $\mathscr{E} \setminus U$ равно нулю. (Если траектория $x(s)$ непрерывна, то τ_U есть момент первого достижения ею множества $\mathscr{E} \setminus U$.) Обозначим

* Поскольку $A \subseteq \tilde{A}$, то теорема верна и для сильного инфинитезимального оператора. Впрочем, приводимое доказательство одинаково годится как для сильного, так и для слабого случая.

через V_n множество всех точек $y \in \mathscr{E}$ таких, что $\rho(y, \mathscr{E} \setminus U) < \frac{1}{n}$*. Тогда

$$\{\tau_U(\omega) \leqslant t\} = \left[\bigcap_{n=1}^{\infty} \bigcup_{r<t} \{x(r, \omega) \in V_n\}\right] \cup \{x(t, \omega) \in \mathscr{E} \setminus U\},$$

где r пробегает рациональные числа. Отсюда видно, что τ_U — случайная величина, не зависящая от будущего.

Теорема 3. *Пусть $\tilde{A}$ слабый ** инфинитезимальный оператор непрерывного справа строго марковского процесса $x(t)$. Если функция $\tilde{A}f(x)$ непрерывна в точке x и если для некоторой окрестности U_0 точки x $\mathbf{M}_x\tau_{U_0} < \infty$, то*

$$\tilde{A}f(x) = \lim_{d(U)\to 0} \frac{\mathbf{M}_x f[x(\tau_U)] - f(x)}{\mathbf{M}_x \tau_U} \tag{15}$$

($d(U)$ обозначает диаметр окрестности U).

Доказательство. Случайная величина τ_U не зависит от будущего. Если $U \subseteq U_0$, то $\tau_U \leqslant \tau_{U_0}$ и, следовательно, $\mathbf{M}_x\tau_U < \infty$. Поэтому к τ_U применима теорема 2. Если $g(x) = \tilde{A}f(x)$ непрерывна в точке x, то для всякого $\varepsilon > 0$ найдется $\delta > 0$ такое, что для любого $y \in U$ $|g(y) - g(x)| < \varepsilon$ и, следовательно, $|g[x(t)] - g(x)| < \varepsilon$ для $t < \tau_U$. Следовательно, правая часть (14) отличается от $g(x)\mathbf{M}_x\tau_U$ меньше чем на $\varepsilon\mathbf{M}_x\tau_U$, что и доказывает формулу (15).

5. Лемма 1. *Пусть $x(t, \omega)$ — строго марковский непрерывный справа процесс и U_0 — некоторая область в $\mathscr{E}$. Положим*

$$m(y) = \mathbf{M}_y\tau_{U_0} \quad (y \in \mathscr{E}).$$

Если $m(x) < \infty$ для некоторой точки x из U_0, то для всякой окрестности U точки x, содержащейся в U_0, имеет место равенство

$$\mathbf{M}_x\tau_U = -\mathbf{M}_x m[x(\tau_U)] + m(x). \tag{16}$$

Доказательство. Заметим, что $\theta_{\tau_U}(\tau_{U_0}) = \tau_{U_0} - \tau_U$. Поэтому в силу (4)

$$\mathbf{M}_x(\tau_{U_0} - \tau_U) = \mathbf{M}_x\mathbf{M}_{x(\tau)}\tau_{U_0} = \mathbf{M}_x m[x(\tau_U)],$$

что равносильно (16).

Если подставить значение $\mathbf{M}_x\tau_U$ из формулы (16) в формулу (15), мы получим следующий вариант теоремы 3:

Теорема 3′. *Если выполнены предположения теоремы 3, то*

$$\tilde{A}f(x) = -\lim_{d(U)\to 0} \frac{\mathbf{M}_x f[x(\tau_U)] - f(x)}{\mathbf{M}_x m[x(\tau_U)] - m(x)} = -\lim_{d(U)\to 0} \frac{\int_{\mathscr{E}} |f(y) - f(x)|\,\Pi_U(x, dy)}{\int_{\mathscr{E}} |m(y) - m(x)|\,\Pi_U(x, dy)},$$

где $\Pi_U(x, \Gamma) = \mathrm{P}_x\{x(\tau_U) \in \Gamma\}$.

6. Для доказательства конечности $\mathbf{M}_x\tau_U$ часто бывает полезна следующая

---

* Через $\rho(x, y)$ обозначается расстояние в пространстве $\mathscr{E}$.

** См. сноску на стр. 43.

Лемма 2. *Пусть $x(t)$ — непрерывный справа марковский процесс, U — открытое множество в $\mathscr{E}$. Если для некоторых $t>0$, $\alpha>0$ $\mathbf{P}_x\{\tau_U>t\}<1-\alpha$ для всех $x\in U$, то $\mathbf{M}_x\tau_U<K<\infty$ для всех $x\in U$.*

Доказательство. Положим $A_s=\{\tau_U>s\}$. Для любого $s\geqslant 0$ имеем

$$A_{s+t}=A_s\cap\theta_sA_t.$$

Поэтому в силу (3)

$$\mathbf{P}_x(A_{s+t})=\int\limits_{A_s}\mathbf{P}_{x(s)}(A_t)\,\mathbf{P}_x(d\omega).$$

Для $\omega\in A_s$ $x(s,\omega)\in U$ и по условию $\mathbf{P}_{x(s)}(A_t)=\mathbf{P}_{x(s)}\{\tau_U>t\}<1-\alpha$. Следовательно, $\mathbf{P}_x(A_{s+t})<(1-\alpha)\,\mathbf{P}_x(A_s)$. Отсюда $\mathbf{P}_x(A_{nt})<(1-\alpha)^n$ и мы имеем

$$\mathbf{M}_x\tau_U=\int\limits_0^\infty\mathbf{P}_x(\tau_U>s)\,ds=\sum_{n=0}^{\infty}\int\limits_{nt}^{(n+1)t}\mathbf{P}_x(\tau_U>s)\,ds<t\sum_{n=0}^{\infty}P_x(\tau_U>nt)=$$

$$=t\sum_{n=0}^{\infty}\mathbf{P}_x(A_{nt})<t\sum_{n=0}^{\infty}(1-\alpha)^n=\frac{t}{\alpha}.$$

§ 3. Феллеровские процессы

7. Марковский процесс $x(t,\omega)$ в метрическом пространстре $\mathscr{E}$ мы называем *феллеровским*, если пространство C всех ограниченных непрерывных функций на $\mathscr{E}$ инвариантно относительно операторов T_t. Это условие означает, что движение в некотором смысле устойчиво: распределение вероятностей $\mathbf{P}_x\{x(t)\in\Gamma\}$ для положения движущейся частицы в момент времени t изменяется мало (в смысле слабой сходимости мер), если мало изменить исходную точку x. (См. подробнее [11]).

Для феллеровских процессов целесообразно несколько изменить определения инфинитезимальных операторов A и $\widetilde{A}$, данные в $n^\circ 2$. Именно, мы будем считать, что $f\in D_A$, $Af=g$ (или $f\in D_{\widetilde{A}}$, $\widetilde{A}f=g$), если помимо соотношения (6) (соответственно, (7)) выполнено условие $f,\ g\in C$. Утверждения А — В $n^\circ 2$ полностью сохраняют силу при таком понимании операторов A и $\widetilde{A}$, если заменить пространства B_0 и $\widetilde{B}_0$ на $C_0=C\cap B_0$ и $\widetilde{C}_0=C\cap\widetilde{B}_0$ (см. [5], § 4).

Все непрерывные справа феллеровские процессы являются строго марковскими (см. [6], теорема 2), и к ним применимы результаты § 2.

8. Лемма 3. *Пусть $x(t)$ феллеровский процесс и пусть для некоторых $x\in\mathscr{E}$, $t>0$ и некоторой области V $\mathbf{P}_x\{x(t)\in V\}=\alpha>0$. Тогда существует окрестность U точки x такая, что $\mathbf{P}_y\{x(t)\in V\}>\frac{\alpha}{2}$ для всех $y\in U$.*

Доказательство. Обозначим через Γ_n множество всех точек z, для которых $\rho(z,\ \mathscr{E}\setminus V)\geqslant\frac{1}{n}$. Очевидно, $V=\bigcup\limits_n\Gamma_n$. Следовательно, $\lim\limits_{n\to\infty}\mathbf{P}_x\{x(t)\in\Gamma_n\}=\mathbf{P}_x\{x(t)\in V\}=\alpha$ и для некоторого n_0 $\mathbf{P}_x\{x(t)\in\Gamma_n\}>$

$> \frac{3}{4}\alpha$. Рассмотрим непрерывную функцию

$$f(y) = \begin{cases} n_0 \rho(y, \mathcal{E} \setminus V) & \text{для } y \in \Gamma_{n_0} \\ 1 & \text{для } y \in \Gamma_{n_0}. \end{cases}$$

Ввиду феллеровского характера процесса соответствующая функция $g(y) = \mathbf{M}_y f[x(t)]$ также непрерывна и поэтому найдется окрестность U точки x такая, что для $y \in U$ $g(y) > g(x) - \frac{\alpha}{4}$. Имеем

$$g(y) < \mathbf{P}_y\{x(t) \in V\},\ g(x) > \mathbf{P}_x\{x(t) \in \Gamma_{n_0}\} > \frac{3}{4}\alpha.$$

Следовательно,

$$\mathbf{P}_y\{x(t) \in V\} > \frac{\alpha}{2}.$$

Мы будем говорить, что точка $x \in \mathcal{E}$ есть *точка поглощения* для процесса $x(t)$, если для всех t $\mathbf{P}_x\{x(t) = x\} = 1$. В этом случае $T_t f(x) = \mathbf{M}_x f[x(t)] = f(x)$ для любой функции f. Поэтому $\tilde{A} f(x) = 0$ для всех $f \in D_{\tilde{A}}$.

Лемма 4. *Если x не является точкой поглощения для непрерывного справа феллеровского процесса $x(t)$, то существует окрестность U точки x такая, что $m(y) = \mathbf{M}_y \tau_U < \infty$ для всех $y \in U$.*

Доказательство. Найдется область V такая, что $\rho(x, V) > 0$ и для некоторого t $\mathbf{P}_x\{x(t) \in V\} = \alpha > 0$. В силу леммы 3 можно построить окрестность U точки x так, чтобы $\mathbf{P}_y\{x(t) \in V\} > \frac{\alpha}{2}$, для всех $y \in U$.

Выберем U так, чтобы $U \cap V = 0$. Тогда $\mathbf{P}_y(\tau_U > t) < \mathbf{P}_y\{x(t) \overline{\in} V\} < 1 - \frac{\alpha}{2}$ для всех $y \in U$, и по лемме 2 $\mathbf{M}_y \tau_U < \infty$ для всех $y \in U$.

Из леммы 4 следует, что для феллеровского процесса точки поглощения образуют замкнутое множество.

9. Положим

$$\mathfrak{A} f(x) = \lim_{d(U) \to 0} \frac{\mathbf{M}_x f[x(\tau_U)] - f(x)}{\mathbf{M}_x \tau_U} \text{ *}. \tag{17}$$

Если этот предел существует для всех x и если f и $\mathfrak{A} f \in C$, то будем полагать $f \in D_{\mathfrak{A}}$.

Теорема 4. *Для любого непрерывного справа феллеровского процесса $A \subseteq \tilde{A} \subseteq \mathfrak{A}$.*

Доказательство. Соотношение $A \subseteq \tilde{A}$ выполняется в силу $n°$ 2, Б). Покажем, что $\tilde{A} \subseteq \mathfrak{A}$. Пусть $f \in D_{\tilde{A}}$. Если x точка поглощения, то $\tilde{A} f(x) = 0$. С другой стороны, согласно принятому нами соглашению, $\mathfrak{A} f(x) = 0$. Если x не является точкой поглощения, то по лемме 2 существует окрестность U_0 точки x такая, что $\mathbf{M}_x \tau_{U_0} < \infty$, и по теореме 3 $\mathfrak{A} f(x) = \tilde{A} f(x)$. Итак, $\mathfrak{A} f(x) = \tilde{A} f(x)$ для всех $x \in \mathcal{E}$ и $f \in D_{\mathfrak{A}}$.

Теорема 5. *Пусть $x(t, \omega)$ непрерывный справа феллеровский процесс. Если пространство $\mathcal{E}$ компактно, то*

$$A = \tilde{A} = \mathfrak{A}.$$

---

* При этом будем считать, что если $\mathbf{M}_x \tau_U = +\infty$, то $\frac{\mathbf{M}_x f[x(\tau_U)] - f(x)}{\mathbf{M}_x \tau_U} = 0$. Таким образом, если x—точка поглощения, то $\mathfrak{A} f(x) = 0$.

Доказательство. Согласно теореме 5 работы [5], $\widetilde{A} = A$ и $\widetilde{C}_0 = C_0 = C$. По теореме 4 $\widetilde{A} \subseteq \mathfrak{A}$, и поэтому достаточно проверить, что $D_{\mathfrak{A}} \subseteq D_{\widetilde{A}}$.

Пусть $f \in D_{\mathfrak{A}}$. Положим $h = f - \mathfrak{A}f$, $\widetilde{f} = R_1 h = \int_0^\infty e^{-t} T_t h \, dt$. Поскольку $h \in C = \widetilde{C}_0$, то (см. $n°$ 2, В) $\widetilde{f} \in D_{\widetilde{A}}$ и $\widetilde{f} - \widetilde{A}\widetilde{f} = h$. Поскольку $\widetilde{A} \subseteq \mathfrak{A}$, то $\widetilde{f} - \mathfrak{A}\widetilde{f} = h$. Отсюда видно, что функция $\varphi = f - \widetilde{f}$ удовлетворяет уравнению

$$\mathfrak{A}\varphi = \varphi. \tag{18}$$

В силу компактности пространства $\mathcal{E}$ $\varphi(x)$ достигает максимума в некоторой точке x_0. Из формулы (17) видно, что $\mathfrak{A}\varphi(x_0) \leqslant 0$. В силу (18) $\varphi(x_0) \leqslant 0$ и, значит, $\varphi(x) \leqslant 0$ для всех $x \in \mathcal{E}$. Аналогично доказывается, что для всех $x \in \mathcal{E}$ $-\varphi(x) \leqslant 0$. Следовательно, $\varphi = 0$ и $f = \widetilde{f} \in D_{\widetilde{A}}$.

§ 4. Непрерывные феллеровские процессы. Обобщенные эллиптические дифференциальные операторы

10. В этом параграфе мы будем рассматривать только непрерывные* феллеровские процессы.

Как уже отмечалось в $n°4$, если траектория $x(t)$ непрерывна, то τ_U есть момент первого достижения ею замкнутого множества $\mathcal{E} \setminus U$. Очевидно, $x(\tau_U)$ принадлежит границе U' области U, и выражение (17) для оператора $\mathfrak{A}$ можно записать в виде

$$\mathfrak{A}f(x) = \lim_{d(U)\to 0} \frac{\int_{U'} [f(y) - f(x)]\, \Pi_U(x, dy)}{c_U(x)}, \tag{19}$$

где

$$\Pi_U(x, \Gamma) = \mathbf{P}_x\{x(\tau_U) \in \Gamma\}; \quad c_U(x) = \mathbf{M}_x \tau_U.$$

Если U_0 окрестность x такая, что $m(x) = \mathbf{M}_x \tau_{U_0} < \infty$, то, согласно $n°5$, формулу (19) можно переписать в виде

$$\mathfrak{A}f(x) = -\lim_{d(U)\to 0} \frac{\int_{U'} [f(y) - f(x)]\, \Pi_U(x, dy)}{\int_{U'} [m(y) - m(x)]\, \Pi_U(x, dy)}. \tag{20}$$

Определенный формулами (19) и (20) оператор $\mathfrak{A}$ обладает следующими свойствами:

1) Если $f_1(x) = f_2(x)$ в некоторой окрестности x_0, то $\mathfrak{A}f_1(x_0) = \mathfrak{A}f_2(x_0)$.

2) Если $f(x)$ достигает в точке x_0 относительного минимума, то $\mathfrak{A}f(x_0) \geqslant 0$.

3) Пусть оператор $\mathfrak{A}$ определен в точке x_0 для каких-нибудь непрерывных функций φ_i $(i = 1, 2, \ldots, n)$ и их попарных произведений

---

* Процесс $x(t, \omega)$ мы называем непрерывным, если при любом $\omega \in \Omega$ $x(t, \omega)$ есть непрерывная функция от t.

$\varphi_i\varphi_j\,(i, j = 1, 2, \ldots, n)$ и пусть $F(y_1, \ldots, y_n)$ — любая функция n вещественных переменных, дважды непрерывно дифференцируемая в окрестности $(\varphi_1(x_0), \ldots, \varphi_n(x_0))$. Тогда оператор $\mathfrak{A}$ определен в точке x_0 и для функции $F(\varphi_1, \ldots, \varphi_n)$, причем

$$\mathfrak{A}F(\varphi_1, \ldots, \varphi_n) = \sum_{i=1}^{n} a_i \frac{\partial F}{\partial \varphi_i} + \sum_{i,j=1}^{n} b_{ij} \frac{\partial^2 F}{\partial \varphi_i\, \partial \varphi_j},$$

где $a_i = \mathfrak{A}(\varphi_i - \varphi_i^0)$, $b_{ij} = \mathfrak{A}(\varphi_i - \varphi_i^0)(\varphi_j - \varphi_j^0)$ $(\varphi_i = \varphi_i(x), \varphi_i^0 = \varphi_i(x_0))$ и производные берутся в точке $(\varphi_1^0, \ldots, \varphi_n^0)$. Числа b_{ij} образуют неотрицательную матрицу.

Свойства 1 и 2 очевидны. Докажем свойство 3. Имеем

$$F(\varphi_1, \ldots, \varphi_n) - F(\varphi_1^0, \ldots, \varphi_n^0) = \sum_i \frac{\partial F}{\partial \varphi_i} \Delta_i + \sum_{i,j} \frac{\partial^2 F}{\partial \varphi_i\, \partial \varphi_j} (1 + \varepsilon_{ij}) \Delta_i \Delta_j,$$

где $\Delta_i = \varphi_i - \varphi_i^0$, производные берутся в точке $(\varphi_1^0, \ldots, \varphi_n^0)$ и $\varepsilon_{ij} = \varepsilon_{ij}(\varphi_1, \ldots, \varphi_n) \to 0$, когда $\varphi_i \to \varphi_i^0$ (следовательно, когда $x \to x_0$). Подставляя это выражение в (19), находим

$$\mathfrak{A}F(\varphi_1, \ldots, \varphi_n) = \lim_{d(U)\to 0} \left\{ \sum_i \frac{\partial F}{\partial \varphi_i} \frac{\int_{U'} \Delta_i \Pi_U(x_0, dx)}{c_U(x)} + \right.$$

$$\left. + \sum_{i,j} \frac{\partial^2 F}{\partial \varphi_i\, \partial \varphi_j} \frac{\int_{U'} \Delta_i \Delta_j \Pi_U(x_0, dx)}{c_U(x)} + \sum_{i,j} \frac{\int_{U'} \varepsilon_{ij} \Delta_i \Delta_j \Pi_U(x_0, dx)}{c_U(x)} \right\}.$$

По условию первый член сходится к $\sum_i \frac{\partial F}{\partial \varphi_i} a_i$, второй к $\sum_{i,j} \frac{\partial^2 F}{\partial \varphi_i\, \partial \varphi_j} b_{ij}$. Третий член сходится к нулю. В самом деле,

$$\left| \frac{1}{c_U(x)} \int_{U'} \varepsilon_{ij} \Delta_i \Delta_j \Pi_U(x_0, dx) \right| \leqslant \max_{x \in U'} |\varepsilon_{ij}| \sqrt{\frac{1}{c_U(x)} \int_{U'} \Delta_i^2 \Pi_U(x_0, dx)} \times$$

$$\times \sqrt{\frac{1}{c_U(x)} \int_{U} \Delta_j^2 \Pi_U(x_0, dx)}$$

и из трех множителей, стоящих в правой части, первый стремится к нулю, а два других ограничены.

Чтобы доказать неотрицательность матрицы b_{ij}, достаточно заметить, что $\sum_{i,j} b_{ij} \lambda_i \lambda_j = \mathfrak{A}h(x_0)$, где функция $h(x) = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i [\varphi_i(x) - \varphi_i(x_0)]^2$ достигает относительного минимума в точке x_0.

Доказанные свойства оператора $\mathfrak{A}$ дают все основания считать этот оператор естественным обобщением эллиптических дифференциальных операторов второго порядка. В частности свойство 3 показывает, что если в окрестности какой-нибудь точки x_0 можно ввести систему координат так, чтобы сами координаты и их попарные произведения принадлежали области определения $\mathfrak{A}$, то для любой дважды непрерывно дифференцируемой функции от этих координат оператор $\mathfrak{A}$ совпадает с некоторым классическим эллиптическим дифференциальным оператором второго порядка

(который, впрочем, может вырождаться в оператор первого порядка или даже в нуль).

11. Рассмотрим один пример. Пусть $x(t)$ непрерывный процесс в n-мерном евклидовом пространстве, инвариантный относительно всех движений. Обозначим через $S_r(x)$ сферу и через $U_r(x)$ открытый шар радиуса r с центром в точке x. Положим $\tau_r = \tau_{U_r(x)}$. Очевидно, $c_{U_r(x)} = c(r)$ не зависит от x и точка $x(\tau_r)$ равномерно распределена на сфере $S_r(x)$. Выражение (19) для оператора $\mathfrak{A}$ принимает вид

$$\mathfrak{A}f(x) = \lim_{r \to 0} \frac{r^2}{c(r)} \frac{\int\limits_{S_r(x)} [f(y) - f(x)]\, d\sigma}{r^2}, \tag{21}$$

где интегрирование производится по равномерному распределению на $S_r(x)$ (мера всей сферы принимается за единицу). Положим

$$\mathfrak{A}_1 f(x) = \lim_{r \to 0} \frac{\int\limits_{S_r(x)} [f(y) - f(x)]\, d\sigma}{r^2}$$

и пусть $x = (x_1, \ldots, x_n)$, $y = (y_1, \ldots, y_n)$. Имеем

$$\mathfrak{A}_1 (y_i - x_i) = 0, \quad \mathfrak{A}_1 (y_i - x_i)(y_j - x_j) = \frac{1}{n} \delta_{ij}.$$

Следовательно, для любой дважды непрерывно дифференцируемой функции f

$$\mathfrak{A}_1 f = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial^2 f}{\partial x_i}.$$

Обращаясь теперь к формуле (21), видим, что если $\lim \frac{r^2}{c(r)} = k$, то оператор $\mathfrak{A}$ на всех дважды непрерывно дифференцируемых функциях отличается лишь множителем $\frac{k}{n}$ от оператора Лапласа. Если предела $\frac{r^2}{c(r)}$ не существует (или он бесконечен), то пересечение области определения оператора $\mathfrak{A}$ с множеством дважды непрерывно дифференцируемых функций состоит из гармонических функций. Более внимательный анализ показывает, что этот второй случай невозможен. Первый случай реализуется для многомерного винеровского процесса.

12. Изучим теперь более подробно одномерный случай. Пусть $\mathcal{E}$ — некоторый интервал (замкнутый или открытый, ограниченный или неограниченный) на числовой прямой. Условимся говорить, что точка x_0 *проходима вправо* (*влево*), если для некоторого t $\mathbf{P}_{x_0}\{x(t) > x_0\} > 0$ (соответственно, $\mathbf{P}_{x_0}\{x(t) < x_0\} < 0$). Если точка x_0 не проходима ни вправо, ни влево, то она является точкой поглощения и $\mathfrak{A}f(x_0) = 0$. Во всех остальных случаях в силу леммы 4 § 3 можно выбрать окрестность U_0 точки x_0 так, чтобы $m(x) = \mathbf{M}_x \tau_{U_0} < \infty$ для всех $x \in U_0$. Формула (20) принимает вид

$$\mathfrak{A}f(x) = -\lim \frac{p_2 [f(x_2) - f(x)] + p_1 [f(x_1) - f(x)]}{p_2 [m(x_2) - m(x)] + p_1 [m(x_1) - m(x)]} \quad (x \in U_0), \tag{22}$$

где

$$p_i = \mathbf{P}_x \{x(\tau_U) = x_i\} = \Pi_U(x, x_i) \quad (U = (x_1, x_2), \quad i = 1, 2).$$

Если точка x_0 проходима вправо, но не проходима влево, то $p_2 = 1$, $p_1 = 0$ и

$$\mathfrak{A}f(x) = -\lim \frac{f(x_2) - f(x_0)}{m(x_2) - m(x_0)} = -D_m^+ f(x_0). \tag{23}$$

Если точка x проходима влево, но не проходима вправо, то $p_1 = 1$, $p_2 = 0$ и

$$\mathfrak{A}f(x_0) = -\lim_{x_1 \to x-0} \frac{f(x_1) - f(x_0)}{m(x_1) - m(x_0)} = -D_m^- f(x_0). \tag{24}$$

Точки, проходимые в обе стороны, мы будем называть *регулярными*. Прежде чем изучать вид оператора $\mathfrak{A}$ в регулярных точках, докажем некоторые леммы.

13. Положим * $\tau_a = \inf_{x(t)=a} t$ (Эта функция измерима, ибо если $x(0, \omega) < a$, $\tau_a = \tau_{(-\infty, a)}$ и если $x(0, \omega) > a$, то $\tau_a = \tau_{(a, +\infty)}$). Положим далее

$$p(x, a) = \mathbf{P}_x(\tau_a < \infty); \quad p(x, a, b) = \mathbf{P}_x(\tau_a < \tau_b).$$

Говоря наглядно, $p(x, a)$ есть вероятность для частицы, выходящей из точки x, когда-нибудь достичь a, а $p(x, a, b)$ есть вероятность достичь a прежде чем b.

Лемма 5. *Если* $a < x < y < b$ *или* $a > x > y > b$, *то*

$$p(y, a) = p(y, x)\, p(x, a), \tag{25}$$

$$p(y, a, b) = p(y, x, b)\, p(x, a, b). \tag{26}$$

Доказательство. Имеем

$$\{x(0) = y;\ \tau_a < \infty\} = \{x(0) = y,\ \tau_x < \infty\} \cap \theta_{\tau_x}\{\tau_a < \infty\}$$

и, в силу (3)

$$\mathbf{P}_y\{x(0) = y, \tau_a < \infty) = \int\limits_{\substack{x(0)=y \\ \tau_x < \infty}} \mathbf{P}_{x(\tau_x)}\{\tau_a < \infty\}\, \mathbf{P}_y(d\omega).$$

Ввиду того, что $\mathbf{P}_y\{x(0) = y\} = 1$, эту формулу можно переписать в виде

$$\mathbf{P}_y\{\tau_a < \infty) = \int\limits_{\tau_x < \infty} \mathbf{P}_{x(\tau_x)}\{\tau_a < \infty\}\, \mathbf{P}_y(d\omega).$$

Левая часть равна $p(y, a)$. Поскольку $x(\tau_x) = x$, то правая часть равна $\mathbf{P}_x(\tau_a < \infty)\, \mathbf{P}_y(\tau_x < \infty) = p(x, a)\, p(y, x)$, и соотношение (25) доказано. Аналогично доказывается и соотношение (26).

Лемма 6. *Если* $p(a, b) > 0$, *то* $\mathbf{M}_x \tau_{(a, b)} < \infty$ *для всех* $x \in (a, b)$.

Доказательство. Из соотношения

$$\theta_{\tau_x}\{\tau_b > t\} \subset \{\tau_b(\omega) > t\}$$

* Если $x(t, \omega) \neq a$ для всех t, то $\tau_a(\omega) = +\infty$.

из формулы (3), принимая во внимание, что $x(\tau_x) = x$, имеем

$$\mathbf{P}_a\{\tau_b \geqslant t\} \geqslant \mathbf{P}_a\{\theta_{\tau_x}(\tau_b > t)\} = \mathbf{M}_a \mathbf{P}_{x(\tau_x)}\{\tau_b > t\} = \mathbf{P}_x\{\tau_b > t\}.$$

Поскольку $\tau_{(a,\,b)} = \min(\tau_a, \tau_b) \leqslant \tau_b$, то

$$\mathbf{P}_x\{\tau_{(a,\,b)} > t\} \leqslant \mathbf{P}_x\{\tau_b > t\} \leqslant \mathbf{P}_a\{\tau_b > t\}.$$

При $t \to \infty$ правая часть стремится к $\mathbf{P}_a(\tau_b = \infty) = 1 - p(a, b)$, и так как $p(a, b) > 0$, то для некоторого t $\mathbf{P}_a\{\tau_b > t\} = 1 - \alpha < 1$. Тогда $\mathbf{P}_x\{\tau_{(a,\,b)} > t\} < 1 - \alpha$ для всех $x \in (a, b)$. В силу леммы 2 отсюда вытекает, что $\mathbf{M}_x \tau_{(a,\,b)} < \infty$ для всех $x \in (a, b)$.

Лемма 7. *Пусть* $a < x < b$ *или* $a > x > b$. *Если* $p(x, a, b) = 0$, *то* $p(x, a) = 0$.

Доказательство. Пусть для определенности $a < x < b$. Положим $z \in \Gamma_1$, если $z < a + \frac{x - a}{3}$, $z \in \Gamma_2$, если $z > b - \frac{b - x}{3}$. Будем говорить, что траектория $x(t)$ до момента T ровно n раз переходит из множества Γ_1 в множество Γ_2, если существуют $0 \leqslant s_1 < t_1 < s_2 < t_2 < \ldots < s_n < t_n \leqslant T$ такие, что $x(s_i) \in \Gamma_1$, $x(t_i) \in \Gamma_2$ $(i = 1, 2, \ldots n)$, но не существует аналогичного набора из $2(n+1)$ точек. Положим: $\omega \in A$, если $x(0, \omega) = x$, и $\tau_a(\omega) < +\infty$; $\omega \in A_n$, если $\omega \in A$ и траектория $x(t, \omega)$ до момента $\tau_a(\omega)$ ровно n раз переходит из Γ_1 в Γ_2. Обозначим через $\tau^{(n)}(\omega)$ нижнюю грань значений T таких, что $x(T, \omega) = x$ и траектория $x(t, \omega)$ до момента T ровно n раз переходит из Γ_1 в Γ_2 (если таких значений T не существует, то мы считаем $\tau^{(n)}(\omega) = +\infty$). Замечаем, что $A = \bigcup_{n=0}^{\infty} A_n$ и $A_n \subset \theta_{\tau^{(n)}} A_0$.

Поскольку случайная величина $\tau^{(n)}$ не зависит от будущего, то согласно (3)

$$\mathbf{P}_x(\theta_{\tau^{(n)}} A_0) = \mathbf{M}_x \mathbf{P}_{x(\tau^{(n)})}(A_0).$$

Но $x(\tau^{(n)}) = x$ и по условию $\mathbf{P}_x(A_0) = 0$. Следовательно, $\mathbf{P}_x\{\theta_{\tau^{(n)}} A_0\} = 0$, $\mathbf{P}_x(A_n) = 0$ и $\mathbf{P}_x(A) = 0$.

Лемма 8. *Пусть* $p(a, b) > 0$. *Если* $a < b$, *то* $\lim\limits_{x \to b-0} p(x, b, a) = 1$. *Если* $a > b$, *то* $\lim\limits_{x \to b+0} p(x, b, a) = 1$.

Доказательство. Пусть для определенности $a < b$ и пусть $< x < x_1 < x_2 < \ldots < x_n < \ldots < b$, причем $x_n \to b$. Если $x(0, \omega) = x$, то

$$\tau_{x_1} < \tau_{x_2} < \ldots < \tau_{x_n} < \tau_b. \tag{27}$$

Пусть $A_n = \{\tau_{x_n} < \tau_a\}$; $A = \{\tau_b < \tau_a\}$. Очевидно, $A \subseteq \bigcap_{n=1}^{\infty} A_n$. Предположим, что $\omega \in (\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n) \setminus A$. Тогда $x(t, \omega) \neq 0$ для $t \leqslant \tau_{x_n}(\omega)$ при всех n и, следовательно, для $t \leqslant \tau(\omega) = \lim\limits_{n \to \infty} \tau_{x_n}(\omega)$. Если бы $\tau(\omega) < \infty$, то из соотношений $x(\tau_{x_n}) = x_n$ в силу непрерывности функции $x(t)$ мы имели бы $x(\tau) = b$, т. е. $\omega \in A$. Итак, $\tau(\omega) = \infty$. Но тогда $\tau_a(\omega) = +\infty$ и, в силу (27),

$\tau_b(\omega) = +\infty$. Следовательно, $\tau_{(a,b)} = \min(\tau_a, \tau_b) = +\infty$. Вероятность этого в силу леммы 6 равна нулю. Итак,

$$\mathbf{P}_x\left(\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n \setminus A\right) = 0.$$

Следовательно, $\mathbf{P}_x(A) = \lim_{n\to\infty} \mathbf{P}_x(A_n)$, т. е.

$$p(x, x_n, a) \to p(x, b, a). \tag{28}$$

Но согласно (26)

$$p(x, b, a) = p(x, x_n, a)\, p(x_n, b, a). \tag{29}$$

В силу леммы 7 $p(x, b, a) \neq 0$ (ибо в противном случае $p(x, b) = 0$ и $p(a, b) = p(a, x)\, p(x, b) = 0$). Поэтому из (28) и (29) вытекает, что $p(x_n, b, a) \to 1$, что и требовалось доказать.

Лемма 9. *Пусть $a < b$. Если $p(a, b) > 0$, то все точки из интервала $[a, b$ проходимы вправо. Если все точки из $[a, b]$ проходимы вправо, то $p(a, b) > 0$.*

Доказательство. Заметим прежде всего, что точка x_0 непроходима вправо тогда и только тогда, когда $p(x_0, x) = 0$ для всех $x > x_0$. Допустим, что $a \leqslant x_0 < b$ и x_0 непроходима справа. Тогда $p(a, b) = p(a, x_0)\, p(x_0, b) = 0$. Первая часть леммы доказана.

Покажем теперь, что если точка x_0 проходима вправо, то существуют $x_1 < x_0 < x_2$ такие, что $p(x_1, x_2) > 0$. Действительно, по определению точки, проходимой вправо, $\mathbf{P}_{x_0}\{x(t) > x_0\} > 0$ для некоторого t. Следовательно, найдется $x_2 > x_0$ такое, что $\mathbf{P}_{x_0}\{x(t) > x_2\} > 0$. По лемме 3 существует $\varepsilon > 0$ такое, что $\mathbf{P}_x\{x(t) > x_2\} > 0$ для всех $x \in (x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon)$. Выберем любое $x_1 \in (x_0 - \varepsilon, x_0)$. Тогда $p(x_1, x_2) > 0$.

Предположим, что все точки $[a, b]$ проходимы вправо. Тогда для каждой точки $x_0 \in [a, b]$ можно построить интервал (x_1, x_2), содержащий x_0, такой, что $p(x_1, x_2) > 0$. Из этих интервалов можно выбрать конечное число интервалов $(x_1^{(i)}, x_2^{(i)})$, покрывающих отрезок $[a, b]$. Поскольку $p(x_1^{(i)}, x_2^{(i)}) > 0$, из соотношения (25) вытекает, что $p(a, b) > 0$.

14. Будем говорить, что процесс $x(t, \omega)$ *регулярен на отрезке* $[a, b]$, если $p(a, b) > 0$ и $p(b, a) > 0$. По лемме 9 для этого необходимо, чтобы были регулярны все точки (a, b), и достаточно, чтобы были регулярны все точки $[a, b]$.

Лемма 10. *Если непрерывный феллеровский процесс регулярен на отрезке $[a, b]$, то функция*

$$p(x) = p(x, b, a)$$

непрерывна, монотонно возрастает и

$$\lim_{x\to a+0} p(x) = 0, \qquad \lim_{x\to b-0} p(x) = 1. \tag{30}$$

Для любых $a < x_1 < x < x_2 < b$

$$p(x, x_1, x_2) = \frac{p(x_2) - p(x)}{p(x_2) - p(x_1)}. \tag{31}$$

Доказательство. Пусть $a < x < y < b$. В силу (26)

$$p(x, b, a) = p(x, y, a)\, p(y, b, a)$$

или, что то же самое

$$p(x) = p(x, y, a)\, p(y). \tag{32}$$

Поэтому $p(x) \leqslant p(y)$ и, если $p(x) = p(y)$, то либо $p(x, b, a) = 0$, либо $p(x, y, a) = 1$, откуда $p(x, a, y) = 1 - p(x, a, y) = 0$. Из $p(x, a, y) = 0$ по лемме 7 следует $p(x, a) = 0$ и, в силу (25), $p(b, a) = p(b, x)\, p(x, a) = 0$, что противоречит условию леммы. Из $p(x, b, a) = 0$ по лемме 7 следует $p(x, b) = 0$ и, в силу (25) $p(a, b) = p(a, x)\, p(x, b) = 0$, что также противоречит условию леммы. Итак, доказано, что $p(x)$ монотонно возрастает.

Соотношения (30) вытекают из леммы 8 (для доказательства первого из них надо применить лемму 8 к функции $p(x, a, b) = 1 - p(x, b, a)$). В силу той же леммы 8

$$\lim_{x \to y-0} p(x, y, a) = 1 \quad (a < x < y)$$

и из (32) видно, что

$$\lim_{x \to y-0} p(x) = p(y).$$

Тем самым доказано, что функция $p(x)$ непрерывна справа. Аналогично доказывается, что функция $p(x, a, b) = 1 - p(x)$ непрерывна слева. Следовательно, $p(x)$ непрерывна. Заметим, наконец, что в силу (26)

$$p(x, x_1, x_2) = \frac{p(x, a, x_2)}{p(x_1, a, x_2)} = \frac{1 - p(x, x_2, a)}{1 - p(x_1, x_2, a)}. \tag{33}$$

С другой стороны, в силу (32)

$$p(x, x_2, a) = \frac{p(x)}{p(x_2)}, p(x_1, x_2, a) = \frac{p(x_1)}{p(x_2)}. \tag{34}$$

Из (33) и (34) следует (31).

Подставив в формулу (22) значения $p_1 = p(x, x_1, x_2)$ и $p_2 = 1 - p$ из (31), получим следующее выражение для оператора $\mathfrak{A}$ во всех точках x, лежащих внутри регулярного отрезка $[a, b]$:

$$\mathfrak{A}f(x) = -\lim_{\substack{x_1 \to x-0 \\ x_2 \to x+0}} \frac{\dfrac{f(x_2) - f(x)}{p(x_2) - p(x)} - \dfrac{f(x_1) - f(x)}{p(x_1) - p(x)}}{\dfrac{m(x_2) - m(x)}{p(x_2) - p(x)} - \dfrac{m(x_1) - m(x_2)}{p(x_1) - p(x_2)}}. \tag{35}$$

15. Мы покажем, что предел, стоящий в правой части формулы (35), определяет обобщенную вторую производную функции f относительно двух монотонных функций. При этом нам понадобится следующая

Лемма 11. *Пусть $x(t)$ непрерывный феллеровский процесс, регулярный на отрезке $[a, b]$, и пусть $p(x) = p(x, b, a)$ и $m(x) = \mathbf{M}_x \tau_{(a, b)}$. Тогда $m(x)$ непрерывна на $[a, b]$, производная*

$$D_p^+ m(x) = \lim_{y \to x+0} \frac{m(y) - m(x)}{p(y) - p(x)}$$

существует при любом $x \in (a, b)$, непрерывна справа и монотонно убывает, производная

$$D_p^- m(x) = \lim_{y \to x-0} \frac{m(y) - m(x)}{p(y) - p(x)}$$

существует при любом $x \in (a, b)$, *непрерывна слева и монотонно убывает. В каждой точке* $x \in (a, b)$, *где хотя бы одна из функций* $D_p^+ m(x)$ *или* $D_p^- m(x)$ *непрерывна, имеет место равенство* $D_p^+ m(x) = D_p^- m(x)$.

Доказательство. В силу леммы 10 для $p(x)$ существует обратная функция $q(z)$. Положим $\tilde{m}(z) = -m[q(z)]$. Пусть $0 \leqslant z_1 < z < z_2 \leqslant 1$ и пусть $x_1 = q(z_1)$, $x = q(z)$, $x_2 = q(z_2)$. Тогда $a \leqslant x_1 < x < x_2 \leqslant b$. Согласно лемме 1

$$m(x) - p(x, x_1, x_2)\, m(x_1) - p(x, x_2, x_1)\, m(x_2) = \mathbf{M}_x \tau_{x_1, x_2} > 0.$$

В силу (30) отсюда следует

$$m(x) > \frac{p(x_2) - p(x)}{p(x_2) - p(x_1)}\, m(x_1) + \frac{p(x) - p(x_1)}{p(x_2) - p(x_1)}\, m(x_2)$$

или

$$\tilde{m}(z) < \frac{z_2 - z}{z_2 - z_1}\, \tilde{m}(z_1) + \frac{z - z_1}{z_2 - z_1}\, \tilde{m}(z_2).$$

Следовательно, функция $\tilde{m}(z)$ выпукла на отрезке $[a, b]$. Кроме того, она неположительна и, следовательно, ограничена сверху. Как известно (см., напр., [13], $n°$ 3.18, стр. 114—117), такая функция непрерывна, ее левая и правая производные всюду существуют, представляют собой возрастающие функции и совпадают во всех точках, где хотя бы одна из них непрерывна. Если бы $D_z^- \tilde{m}(z)$ не была непрерывна слева в точке z_0 то нашлись бы $z_1 < z_0$ и $\varepsilon > 0$ такие, что для всех $z \in (z_1, z_0)$

$$D_z^- \tilde{m}(z) < D_z^- \tilde{m}(z_0) - \varepsilon.$$

Отсюда вытекало бы (см., напр., [14], $n°$ 112), что для всех $z \in (z_1, z_0)$

$$\frac{\tilde{m}(z) - \tilde{m}(z_0)}{z - z_0} < D_z^- \tilde{m}(z_0) - \varepsilon,$$

что, очевидно, невозможно. Итак, $D_z^- \tilde{m}(z)$ непрерывна слева. Аналогично показывается, что $D_z^+ \tilde{m}(z)$ непрерывна справа. Для того, чтобы доказать теперь лемму, достаточно вернуться от функции $\tilde{m}(z)$ к функции $m(x) = -\tilde{m}[p(x)]$ и заметить, что $D_p^+ m(x) = -D_z^+ m(z)$ и $D_p^- m(x) = -D_z^+ \tilde{m}(z)$.

Теорема 6. *Пусть* $x(t)$ *непрерывный феллеровский процесс, регулярный на отрезке* $[a, b]$. *Пусть* $p(x) = p(x, b, a)$, $m(x) = \mathbf{M}_x \tau_{(a, b)}$, $n_+(x) = -D_p^+ m(x)$, $n_-(x) = -D_p^- m(x)$.

Если $f \in D_{\mathfrak{A}}$, *то при любом* $x \in (a, b)$ *производная* $D_p^+ f(x)$ *существует и непрерывна справа, производная* $D_p^- f(x)$ *существует и непрерывна слева. При этом* $D_p^+ f(x) = D_p^- f(x)$ *в каждой точке* x, *в которой* $n_+(x) = n_-(x)$. *В интервале* (a, b)

$$\mathfrak{A} f(x) = D_{n_-}^+ D_p^- f(x) = D_{n_+}^- D_p^+ f(x). \tag{36}$$

Замечание. Обозначим через N множество точек непрерывности $n_+(x)$. Согласно лемме 11 для $x \in N$ $n_+(x) = n_-(x)$ и мы обозначим общее значение этих функций через $n(x)$. Тогда формулу (36) можно записать в следующем виде

$$\mathfrak{A} f(x) = \begin{cases} D_n D_p f(x) & \text{для } x \in N \\ \dfrac{D_p f(x+0) - D_p f(x-0)}{n(x+0) - n(x-0)} & \text{для } x \overline{\in} N \end{cases}$$

Именно в этой форме инфинитезимальный оператор был вычислен Феллером в [11]—[12] (без выяснения теоретико-вероятностного смысла функций p и n).

Доказательство. Согласно (35) и лемме 11

$$\lim_{\substack{x_1 \to x-0 \\ x_2 \to x+0}} \left[\frac{f(x_2)-f(x)}{p(x_2)-p(x)} - \frac{f(x_1)-f(x)}{p(x_1)-p(x)}\right] = [n_+(x) - n_-(x)]\,\mathfrak{A}f(x). \tag{37}$$

Отсюда следует, что $D_p^+ f$ и $D_p^- f$ существуют и совпадают, если $n_+(x)=n_-(x)$. Положим

$$F(y) = f(y) - f(x) - D_p^- f(x)\,[p(y) - p(x)],$$
$$G(y) = -m(y) + m(x) - n_-(x)\,[p(y) - p(x)].$$

Имеем $G(x) = 0$ и для $y > x$ $D_p^- G(y) = n_-(y) - n_-(x) > 0$, $D_p^+ G_+(y) = n_+(y) - n_-(x) > 0$, откуда $G(y) > 0$. Выполняя в формуле (35) предельный переход $x_1 \to x - 0$, находим

$$\mathfrak{A}f(x) = \lim_{y \to x+0} \frac{F(y)}{G(y)}. \tag{38}$$

Дальнейшая часть доказательства состоит в обосновании законности применения правила Лопиталя к вычислению предела (38) (ср. [12], конец $n°$ 7).

Предположим, что $\lim\limits_{z \to x+0} \dfrac{D_p^+ F(y)}{D_p^+ G(y)}$ не существует и пусть

$$\lim_{y \to x+0} \frac{D_p^+ F(y)}{D_p^+ G(y)} < c < \overline{\lim_{y \to x+0}} \frac{D_p^+ F(y)}{D_p^+ G(y)}. \tag{39}$$

Положим $\varphi(y) = F(y) - cG(y)$. Поскольку оператор $\mathfrak{A}$ переводит постоянные и функцию p в нуль, а функцию m в -1, имеем

$$\mathfrak{A}\varphi = \mathfrak{A}f + c.$$

Далее, в силу (39), каково бы ни было $x_2 > x$, функция $D_p^+ \varphi = D_p^+ F - cD_p^+ G$ меняет знак в интервале (x, x_2). Поэтому существуют последовательности $y_n \to x + 0$ и $y_n' \to x + 0$ такие, что в точках y_n функция $\varphi(y)$ достигает относительного максимума, а в точках y_n' относительного минимума. В силу (2), $n°$ 10 $\mathfrak{A}\varphi(y_n) \leqslant 0$, $\mathfrak{A}\varphi(y_n') \geqslant 0$ и, следовательно, $\mathfrak{A}f(y_n) \leqslant -c$, $\mathfrak{A}f(y_n') \geqslant -c$. Отсюда $\mathfrak{A}f(x) = -c$. Это соотношение должно выполняться для любой постоянной c, удовлетворяющей неравенству (39), что, очевидно, невозможно. Тем самым доказано, что

$$\lim_{y \to x+0} \frac{D_p^+ F(y)}{D_p^+ G(y)} = \lim \frac{D_p^+ f(y) - D_p^- f(x)}{n_+(y) - n_-(x)} \tag{40}$$

существует. Аналогично доказывается и существование

$$\lim_{y \to x+0} \frac{D_p^- F(y)}{D_p^- G(y)} = \lim_{y \to x+0} \frac{D_p^- f(y) - D_p^- f(x)}{n_-(y) - n_-(x)}. \tag{41}$$

Поскольку $D_p^- f(y) = D_p^+ f(y)$ на всюду плотном множестве N, то оба предела (40) и (41) совпадают,

Положим теперь

$$\psi(y) = F(y)G(x_2) - G(y)F(x_2) \quad (x \leqslant y \leqslant x_2).$$

Так как $\psi(x) = \psi(x_2) = 0$, то либо максимум, либо минимум функции $\psi(y)$ на отрезке $[x, x_2]$ достигается в некоторой внутренней точке y' этого отрезка. В первом случае $D_p^-\psi(y') \geqslant 0 \geqslant D_p^+\psi(y')$, откуда

$$\frac{D_p^+F(y')}{D_p^+G(y')} \leqslant \frac{F(x_2)}{G(x_2)} \leqslant \frac{D_p^-F(y')}{D_p^-G(y)}. \tag{42}$$

Во втором случае имеем противоположные неравенства. Пусть теперь $x_2 \to x + 0$. Тогда $y' \to x + 0$. По доказанному левая и правая части неравенства (42) стремятся к одному и тому же пределу. Средняя часть в силу (38) стремится к $\mathfrak{A}f(x)$. Следовательно,

$$\mathfrak{A}f(x) = \lim_{y \to x+0} \frac{D_p^+f(y) - D_p^-f(x)}{n_+(y) - n_-(x)} = \lim_{y \to x+0} \frac{D_p^-f(y) - D_p^-f(x)}{n_-(y) - n_-(x)}. \tag{43}$$

Этим доказана первая из формул (35). Далее, в силу непрерывности n_+ справа имеем из (43)

$$D_p^+f(x+0) - D_p^-f(x) = [n_+(x) - n_-(x)]\,\mathfrak{A}f(x).$$

Сопоставляя это выражение с формулой (37), находим $D_p^+f(x+0) = D_p^+f(x)$, т. е. функция D_p^+f непрерывна справа.

Аналогичным образом доказывается и вторая формула (36) и непрерывность $D_p^-f(x)$ слева.

§ 5. Некоторые разрывные процессы

16. Предположим, что фазовое пространство $\mathscr{E}$ конечно или счетно и имеет дискретную топологию, т. е. все его точки изолированы. Не ограничивая общности, можно считать, что $\mathscr{E}$ совпадает с множеством натуральных чисел или подмножеством этого множества. Пространство C (так же, как и пространство B) в нашем случае состоит из всех ограниченных функций $f(i)$). Поэтому всякий марковский процесс с дискретным множеством состояний является феллеровским.

Положим $p_{ij}(t) = \mathbf{P}_i\{x(t) = j\}$. Формулу (5) можно записать в виде

$$T_tf(i) = \sum_j p_{ij}(t)f(j).$$

Как известно (см. напр. [10]), всегда существуют пределы

$$a_i = -a_{ii} = \lim_{t \to 0} \frac{1 - p_{ii}(t)}{t},$$

$$a_{ij} = \lim_{t \to 0} \frac{p_{ij}(t)}{t} \quad (i \neq j),$$

причем

$$0 \leqslant a_{ij} < +\infty \quad (i \neq j), \quad 0 \leqslant a_i \leqslant +\infty, \quad \sum_{j \neq 0} a_{ij} \leqslant a_i.$$

Вероятности перехода $p_{ij}(t)$ однозначно определяют непрерывный справа марковский процесс. Для того чтобы существовал непрерывный справа марковский процесс с вероятностями перехода $p_{ij}(t)$, необходимо и достаточно, чтобы $a_i < +\infty$, $\sum_{j \neq i} a_{ij} = a_i$. Вероятностный смысл величин a_i и a_{ij} следующий: если частица находится в начальный момент в точке i, то она остается в этой точке в течение случайного промежутка времени γ, причем $\mathbf{P}_i(\gamma > t) = e^{-a_i t}$; после этого она перескакивает в какую-нибудь другую точку, причем вероятность перескочить в j равна $\frac{a_{ij}}{a_i}$.

Любой непрерывный справа процесс с дискретным множеством состояний, будучи феллеровским, является строго марковским. Вычислим для него оператор $\mathfrak{A}$. Всякая достаточно малая окрестность точки i состоит из одной только точки i. Поэтому для такой окрестности $\tau_U = \gamma$, $\mathbf{P}_i(x(\tau_U) = j) = \mathbf{P}_i(x(\gamma) = j) = \frac{a_{ij}}{a_i}$ и

$$\mathfrak{A}f(i) = \frac{\mathbf{M}_i f(x(\gamma)) - f(i)}{\mathbf{M}_i \gamma_i} = \frac{\sum_{j \neq i} \frac{a_{ij}}{a_i} f(j) - f(i)}{1/a_i} = \sum_j a_{ij} f(j).$$

Область $D\mathfrak{A}$ состоит из всевозможных ограниченных функций $f(j)$, для которых функция $\mathfrak{A}f(i)$ также ограничена.

В случае, когда $\mathcal{E}$ конечно, по теореме 5 $A = \tilde{A} = \mathfrak{A}$. Когда $\mathcal{E}$ счетно, из теоремы 4 можно только заключить, что $A \subseteq \tilde{A} \subseteq \mathfrak{A}$.

17. Рассмотрим более внимательно вероятностную картину течения процесса.

Частица, выходящая из точки $i = i_1$, остается в этой точке в течение некоторого промежутка времени γ_1, затем перескакивает в некоторую, зависящую от случая точку i_2, остается в ней в течение времени γ_2, затем перескакивает в некоторую точку i_3 и т. д. Законы распределения случайных величин $\gamma_1, \gamma_2, \ldots$ и случайных точек $i_2, i_3, \ldots$, как уже указывалось выше, полностью определяются матрицей a_{ij}. Поэтому матрица a_{ij} однозначно задает движение частицы до момента $\eta = \sum_{i=1}^{\infty} \gamma_i$ и, если с вероятностью единица $\eta = +\infty$, то процесс однозначно определяется оператором $\mathfrak{A}$. Однако оператор $\mathfrak{A}$ не дает никакой информации о поведении траектории после момента η. Поэтому, если $\mathbf{P}(\eta < \infty) > 0$, то могут существовать много разных процессов, соответствующих одному и тому же оператору $\mathfrak{A}$. Такие процессы в самом деле существуют: Дуб показал [3], что можно построить процесс, соответствующий матрице a_{ij}, с любым наперед заданным распределением вероятностей $x(\eta)$. Отсюда, между прочим, ясно, что для некоторых процессов со счетным множеством состояний должно иметь место строгое включение $\tilde{A} \subset \mathfrak{A}$.

18. Сказанное о процессах с дискретным множеством состояний нетрудно распространить на так называемые чисто разрывные процессы в любом метрическом пространстве $\mathcal{E}$. Чисто разрывный процесс характеризуется тем, что частица, находящаяся в некоторый момент в точке x, с вероятностью единица остается в этой точке в течение положительного про-

межутка времени γ. Распределение вероятностей для γ может быть только показательным: $\mathbf{P}_x(\gamma > t) = e^{-a(x)t}$. Предположим, что процесс непрерывный справа и феллеровский, и вычислим для него оператор $\mathfrak{A}$. Если $d(U) \to 0$, то $\tau_U \to \gamma + 0$. Поэтому, $\mathbf{M}_x(\tau_U) \to \mathbf{M}_x(\gamma) = \frac{1}{a(x)}$, $x(\tau_U) \to x(\gamma)$ и для $f \in C$

$$f[x(\tau_U)] \to f[x(\gamma)], \mathbf{M}_x f[x(\tau_U)] \to \mathbf{M}_x f[x(\gamma)] = \int_{\mathscr{E}} f(y)\, \Pi(x, dy),$$

где $\Pi(\Gamma) = \mathbf{P}_x(x(\gamma) \in \Gamma)$.

Подставляя найденные пределы в формулу (17), найдем

$$\mathfrak{A}f(x) = a(x)\left[\int_{\mathscr{E}} f(y)\, \Pi(x, dy) - f(x)\right].$$

19. В качестве примера более общих разрывных процессов рассмотрим на прямой непрерывный справа случайный процесс с положительными независимыми приращениями, определяемый формулой *

$$\mathbf{M}_x e^{-\lambda[x(t)-x]} = e^{-ct\lambda^\alpha} \quad (0 < \alpha < 1,\ c > 0).$$

Этот процесс — феллеровский. Положим $U_\varepsilon = (x - \varepsilon, x + \varepsilon)$, $\tau_\varepsilon = \tau_{U\varepsilon}$. Согласно [4] (§ 6, теорема 6) случайная величина $\tau_\varepsilon - x - \varepsilon$ имеет распределение с плотностью

$$p(y) = \begin{cases} \dfrac{\sin \pi\alpha}{\pi} \dfrac{\varepsilon^\alpha}{(y+\varepsilon)y^\alpha} & \text{при } y > 0 \\ 0 & \text{при } y \leqslant 0 \end{cases}$$

Там же показано, что $\mathbf{M}\tau_\varepsilon = \dfrac{\varepsilon^\alpha c}{\Gamma(1-\alpha)}$. Подставляя эти значения в формулу (17), находим следующее выражение для оператора $\mathfrak{A}$.

$$\mathfrak{a}F(x) = \lim_{\varepsilon \to +0} \frac{1}{c\Gamma(\alpha)} \int_\varepsilon^\infty \frac{f(x+z) - f(x)}{z(z-\varepsilon)^\alpha}\, dz.$$

Отсюда имеем

$$\mathfrak{a}f(x) = \frac{1}{c\Gamma(\alpha)} \int_0^\infty \frac{f(x+z) - f(x)}{z^{1+\alpha}}\, dz$$

для всех функций $f(x)$, для которых интеграл в правой части абсолютно сходится.

Поступила в редакцию
14. 12. 55

ЛИТЕРАТУРА

[1] Б. В. Гнеденко и А. Н. Колмогоров, Предельные распределения для сумм независимых случайных величин. 1949.
[2] J. L. Doob, Stochastic processes, New York, 1953.
[3] J. L. Doob, Markoff chains—denumerable case, Trans. Am. Math. Soc., 58:3 (1945), 455—473.

* Распределения вероятностей для приращений суть устойчивые распределения с показателями α, $\beta = -1$ (в обозначениях книги Б. В. Гнеденко и А. Н. Колмогорова [1]).

[4] Е. Б. Дынкин, Некоторые предельные теоремы для сумм независимых случайных величин с бесконечными математическими ожиданиями, Изв. АН СССР, сер. матем., **19** (1955), 247—266.

[5] Е. Б. Дынкин, Марковские процессы и полугруппы операторов, Теория вероятностей и ее применения, вып. **1** (1956), 25—37.

[6] Е. Б. Дынкин и А. А. Юшкевич, Строго марковские процессы. Теория вероятностей и ее применения, вып. **1** (1956), 149—155.

[7] Е. Б. Дынкин, Бесконечно малые операторы марковских случайных процессов, ДАН СССР, **105**:2 (1955), 206—209.

[8] Е. Б. Дынкин, Непрерывные одномерные марковские процессы, ДАН СССР, **105**:3 (1955), 405—408.

[9] А. Н. Колмогоров, Об аналитических методах в теории вероятностей. Успехи матем. наук, вып. 5 (1938), 5—41.

[10] А. Н. Колмогоров, К вопросу о дифференцируемости переходных вероятностей в однородных по времени процессах Маркова со счетным числом состояний. Ученые записки МГУ, **4**, вып. **148** (1951), 53—59.

[11] W. Feller, The general diffusion operator and positivity preserving semi-groups in one dimension, Ann. of. Math., **60**:3 (1954), 417—436.

[12] W. Feller, On second order differential operators, Ann. of Math. **61**:1 (1955), 90—105.

[13] Г. Г. Харди, Д. Е. Литтльвуд, Г. Полиа, Неравенства, ГИИЛ, 1948.

[14] Ш. Ж. де ла Валле-Пуссен, Курс анализа бесконечно малых, Л.—М., **1**, 1933 (Paris, 1914).

INFINITESIMAL OPERATORS OF MARKOV PROCESSES

E. B. DYNKIN (*MOSCOW*)

(Summary)

In 1931 A. Kolmogorov showed [9] that a wide class of one-dimensional Markov processes can be described by the differential equation

$$\frac{\partial u}{\partial t} = a\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + b\frac{\partial u}{\partial x}. \tag{1}$$

Are there one-dimensional Markov processes governed by equations of the type

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \mathfrak{A}u, \tag{2}$$

where $\mathfrak{A}$ is a differential operator of an order higher than 2? This question remained unsettled until 1954—1955 when in was completely solved by W. Feller. Feller showed that every one-dimensional Markov process with a continuous path function is described by (2), where $\mathfrak{A}$ is the generalized second derivative.

The purely analytical method of Feller is essentially connected with the one-dimensional character of the problem. It is very difficult to extend this method to the case of two (and more) dimensions.

In this paper, a method is developed which can be applied to n dimensions as well as to one dimension. It is based on considering the probability properties of path functions. We prove by this method that every continuous Markov process in a space of arbitrary dimension is governed by (2), where $\mathfrak{A}$ is a generalized elliptical differential operator of the second order. Our method can be applied not only to continuous Markov processes, but also to any Markov processes with path functions continuous on the right.

In Feller's papers it is assumed that the semi-group associated with the Markov process under consideration takes continuous functions into continuous ones. The class of processes specified by this condition is very important. We call them Feller processes. However, our method can be applied to a wider class of processes which we call strong Markov processes. By the conventional definition of a Markov process it is required that the development of the process after the time t does not depend on its previous history if the position at the time t is known. We say that a process is a strong Markov process if this condition is fulfilled not only for any constant t, but also for a random t which «does not depend on the future». All Feller processes are strong Markov processes, however, the converse is not true.

In the introductory § 1 a brief exposition of basic facts about Markov and strong Markov processes and associated semi-groups of operators is given. In this we use the results of [5] and [6].

In § 2 the main method of calculating infinitesimal operators corresponding to Markov processes is developed.

Feller processes are treated in § 3. The operator $\mathfrak{A}$, which is constructed in this paragraph, plays the same role in the general case as the differential operator in the right-hand side of equation (1) for diffusion processes, or the matrix of the densities of transition probabilities for processes with denumerably many states.

In order to determine a Markov process, some lateral conditions (boundary conditions in the case of diffusion processes, probability distribution at the moment of condensation of jumps in the case of a process with denumerably many states) are needed in addition to the operator $\mathfrak{A}$. In terms of semi-groups this means that generally the infinitesimal operator A of the Markov process is a contraction of the operator $\mathfrak{A}$ (see Theorem 4). However, Theorem 5 shows that $A = \mathfrak{A}$ if the state space is compact.

In § 4 Feller processes with continuous path functions are treated. It is shown that in this case the operator $\mathfrak{A}$ is a natural generalization of an elliptical differential operator of the second order. A more detailed description of one-dimensional continuous Feller processes is given, and it is proved that the operator $\mathfrak{A}$ in this case is identical to Feller's generalized second derivative. At the same time the probability meaning of the two functions, which appear in the definition of this derivative, come to light.

In § 5 some discontinuous processes are considered.

Some results contained in this paper have been published in [7] without detailed proofs.

ТЕОРИЯ ВЕРОЯТНОСТЕЙ
Том I И ЕЕ ПРИМЕНЕНИЯ *Выпуск 1*
1956

ON CONDITIONAL PROBABILITY SPACES GENERATED BY A DIMENSIONALLY ORDERED SET OF MEASURES

By A. RÉNYI

Introduction

In his paper [1] the author has given a new axiomatic theory of probability, by introducing the notion of a *conditional probability space*. A conditional probability space $[S, \mathfrak{A}, \mathfrak{B}, \mathbf{P}] = \mathfrak{P}$ is defined as follows: S is an arbitrary abstract space, $\mathfrak{A}$ is a σ-algebra of subsets of S, $\mathfrak{B}$ a non empty subset of $\mathfrak{A}$ and $\mathbf{P} = \mathbf{P}(A|B)$ is a set-function of two set variables defined for all $A \in \mathfrak{A}$ and $B \in \mathfrak{B}$; the elements of $\mathfrak{A}$ are interpreted as events, and $\mathbf{P}(A|B)$ as the conditional probability of the vent A with respect to the condition B. It is supposed that the following axioms are fulfilled:

I) $\mathbf{P}(A|B)$ is for any fixed $B \in \mathfrak{B}$ a measure (i. e. a non-negative and countably additive set function) on $\mathfrak{A}$,

II) $\mathbf{P}(B|B) = 1$ for any $B \in \mathfrak{B}$,

III) For any $A \in \mathfrak{A}$, $B \in \mathfrak{B}$ and $C \in \mathfrak{B}$, for which $B \subset C$ and $\mathbf{P}(B|C) > 0$ we have * $\mathbf{P}(A|B) = \frac{\mathbf{P}(AB|C)}{\mathbf{P}(B|C)}$. As regards the immediate consequences of the axioms we mention only that applying Axiom III with $C = B$, and taking Axiom II into account, it follows that $\mathbf{P}(A|B) = \mathbf{P}(AB|B)$, and thus, that $\mathbf{P}(A|B) \leq 1$ for any $A \in \mathfrak{A}$ and $B \in \mathfrak{B}$.

The theory of probability, based on the above axioms should be considered as a natural generalization of the theory of A. N. Kolmogorov given in [2] **. As a matter of fact, if the set $\mathfrak{B}$ consists of the single element S, putting $\mathbf{P}(A|S) = \mathbf{P}_S(A)$ clearly $[S, A, \mathbf{P}_S(A)]$ is a probability space in the sense of [2]. More generally, if $B \in \mathfrak{B}$ is fixed, and we put $\mathbf{P}_B(A) = \mathbf{P}(A|B)$, then $\mathfrak{P}_B = [S, \mathfrak{A}, \mathbf{P}_B(A)]$ is a probability space according to Kolmogorov. Thus a conditional probability space is nothing else than a set of ordinary probability spaces $\mathfrak{P}_B = [S, \mathfrak{A}, \mathbf{P}_B(A)]$, some of which, namely $\mathfrak{P}_B$ and $\mathfrak{P}_C$ if $\mathbf{P}_C(B) > 0$ and $B \subset C$, are connected by Axiom III, which should therefore be considered as a condition of compatibility. If $[S, \mathfrak{A}, \mathbf{Q}]$ is an ordinary probability space, i. e. $\mathbf{Q} = \mathbf{Q}(A)$ a mea-

* We note by AB the intersection, and by $A + B$ the union of the sets A and B.

** After having worked out the theory as presented in [1], the author has been informed, that Kolmogorov himself has once, in a lecture mentioned the possibility of such a generalization of his theory, but he did not publish his ideas on this matter.

sure defined on the σ-algebra $\mathfrak{A}$ of subsets of S, satisfying the condition $\mathbf{Q}(S) = 1$ and we define $\mathfrak{B}$ as the set of those $B \in \mathfrak{A}$ for which $\mathbf{Q}(B) > 0$ and put $\mathbf{P}(A|B) = \frac{\mathbf{Q}(AB)}{\mathbf{Q}(B)}$ for $A \in \mathfrak{A}$ and $B \in \mathfrak{B}$ we obtain a conditional probability space $[S, \mathfrak{A}, \mathfrak{B}, \mathbf{P}]$, which may be called the conditional probability space generated by the ordinary probability space $[S, \mathfrak{A}, \mathbf{Q}]$. However not all conditional probability spaces can be generated in this way by any ordinary probability space. As a matter of fact, if the conditional probability space $[S, \mathfrak{A}, \mathfrak{B}, \mathbf{P}]$ is generated by the ordinary probability space $[S, \mathfrak{A}, \mathbf{Q}]$ we have $S \in \mathfrak{B}$, as $\mathbf{Q}(S) = 1$. On the other hand there exist conditional probability spaces in which S does not belong to $\mathfrak{B}$, and can in no way be adjoined to $\mathfrak{B}$ by extending the conditional probability space. This can be seen as follows. From Axiom III it follows, that if $A \in \mathfrak{A}$, $B \in \mathfrak{B}$, $C \in \mathfrak{B}$, $A \subset B \subset C$ and $\mathbf{P}(B|C) > 0$, we have $\mathbf{P}(A|B) \geqq \mathbf{P}(A|C)$; further if $\mathbf{P}(B|C) = 0$ then also $\mathbf{P}(A|C) = 0$ and therefore $\mathbf{P}(A|B) \geqq \mathbf{P}(A|C)$ holds in this case also; thus it is clear that if $S \in \mathfrak{B}$ we have $\mathbf{P}(A|S) \leqq \inf_{A \subset B \in \mathfrak{B}} \mathbf{P}(A|B)$. Thus if for a denumerable sequence of disjoint sets for which $\sum_{n=1}^{\infty} A_n = S$, we have $\inf_{A_n \subset B \in \mathfrak{B}} \mathbf{P}(A_n|B) = 0$, if S could be adjoined to $\mathfrak{B}$ we would have $\mathbf{P}(A_n|S) = 0$ for $n = 1, 2, \ldots$ and thus $\mathbf{P}(S|S) = 0$ which contradicts Axiom II. As an example let us consider the conditional probability space, which is obtained if we choose for S the n-dimensional Euclidean space E_n, for $\mathfrak{A}$ the set M of all measurable subsets of E_n, for $\mathfrak{B}$ the set M^+ of all subsets of E_n having a finite and positive n-dimensional Lebesgue-measure, and put $\mathbf{P}(A|B) = \frac{\mu_n(AB)}{\mu_n(B)}$ for $B \in M^+$ where μ_n denotes the n-dimensional Lebesgue-measure. Thus we obtain a conditional probability space $[E_n, M, M^+, \mathbf{P}]$ which can not be extended in such a way that E_n should belong to M^+. The situation is the same in every conditional probability space in which $\mathbf{P}(A|B)$ is defined by $\mathbf{P}(A|B) = \frac{\mu(AB)}{\mu(B)}$ for $B \in \mathfrak{B}$, where $\mathfrak{B}$ is defined as the class of those sets B for which $\mu(B) > 0$ where $\mu(B)$ is a σ-finite measure on $\mathfrak{A}$ which is not bounded. Thus the notion of a conditional probability space includes cases in which conditional probability is calculated by the formula $\mathbf{P}(A|B) = \frac{\mu(AB)}{\mu(B)}$ where μ is an unbounded measure, while in the theory of Kolmogorov only bounded (normed) measures can play a similar role. The fact that in such conditional probability spaces S can not be adjoined to $\mathfrak{B}$, i. e, $\mathbf{P}(A|S)$ can not be defined, can be interpreted by saying, that in such conditional probability spaces ordinary probability can not be defined, only conditional probabilities have a sense. As a matter of fact, one of the chief purposes of introducing the concept of a conditional probability space was to include such cases also, which occur frequently in the physical applications of probability theory, as well as in connection with the applications of probability theory to number theory, integral geometry, etc. Thus for instance in the generalized theory there has a sense to speak about a probability distribution which is uniform in the whole n-di-

mensional Euclidean space E_n. The conditional probability space $[E_n, M, M^+, \mathbf{P}]$ described above corresponds exactly to this intuitive notion.

A general principle of constructing conditional probability spaces is the following. Let S denote a set, $\mathfrak{A}$ a σ-algebra of subset of S and $\mathfrak{B}$ a non-void subset of $\mathfrak{A}$. Let Γ denote an arbitrary completely ordered set, and let us suppose that to every $\gamma \in \Gamma$ there corresponds a measure μ_γ defined on the σ-algebra $\mathfrak{A}$. Let us call the system of measures $\{\mu_\gamma;\ \gamma \in \Gamma\}$ *dimensionaly ordered* if the following postulates are satisfied:

a) To every $B \in \mathfrak{B}$ there can be found a $\beta \in \Gamma$ for which $0 < \mu_\beta(B) < +\infty$.

b) if $\mu_\beta(B) < +\infty$ and $\beta < \gamma$ we have $\mu_\gamma(B) = 0$.

Clearly if the system $\{\mu_\gamma;\ \gamma \in \Gamma\}$ is dimensionally ordered, there exists to any $B \in \mathfrak{B}$ only one $\beta \in \Gamma$ for which $0 < \mu_\beta(B) < +\infty$ and if $\alpha < \beta$ we have $\mu_\alpha(B) = +\infty$. Let us define $\mathbf{P}(A \mid B)$ for $A \in \mathfrak{A}$ and $B \in \mathfrak{B}$ as follows: $\mathbf{P}(A \mid B) = \frac{\mu_\beta(AB)}{\mu_\beta(B)}$ where β is the uniquely determined element of Γ for which $0 < \mu_\beta(B) < +\infty$. Thus we obtain a conditional probability space $[S, \mathfrak{A}, \mathfrak{B}, \mathbf{P}]$ which will be called the *conditional probability space generated by the dimensionally ordered set of measures* $\{\mu_\gamma;\ \gamma \in \Gamma\}$.

In § 1 we shall prove, that if $\mathfrak{B}$ is an additive class of sets, i. e. if from $B_1 \in \mathfrak{B}$ and $B_2 \in \mathfrak{B}$ it follows that $B_1 + B_2 \in \mathfrak{B}$, then there exists a dimensionally ordered set of measures, which generates the given conditional probability space. As $\mathfrak{B}$ is the system of all events which may be taken as conditions, the postulate that $\mathfrak{B}$ is an additive class is quite natural. Thus from the point of view of probability theory we can restrict ourselves to conditional probability spaces in which $\mathfrak{B}$ is an additive class, and therefore by Theorem 1 to conditional probability spaces which can be generated by a dimensionally ordered set of measures. The idea of generating a conditional probability space by a dimensionally ordered set of measures has been suggested to the author by E. Marczewski. If the conditional probability space $[S, \mathfrak{A}, \mathfrak{B}, \mathbf{P}]$ is generated by an ordinary probability space $[S, \mathfrak{A}, \mathbf{Q}]$ then $\mathfrak{B}$ is clearly an additive class; thus if the condition that $\mathfrak{B}$ should be an additive class is included into our system of axioms, the theory still remains a generalization of that of A. N. Kolmogorov. The condition that $\mathfrak{B}$ should be an additive class is not necessary for the existence of a dimensionally ordered set of measures which generates the given conditional probability space. If however such a system of measures exists, the conditional probability space can be extended by replacing $\mathfrak{B}$ by an additive class $\mathfrak{B}^*$ containing $\mathfrak{B}$. As a matter of fact if the dimensionally ordered set $\{\mu_\gamma\}$ of measures generates the conditional probability space, and $\mathfrak{B}_\gamma$ is the set of all those sets B for which $0 < \mu_\gamma(B) < +\infty$ then $\sum_{\gamma \in \Gamma} \mathfrak{B}_\gamma$ is clearly an additive class, further by putting

$$\mathbf{P}(A \mid C) = \frac{\mu_\gamma(AC)}{\mu_\gamma(C)} \quad \text{for } C \in \mathfrak{B}_\gamma \quad (\gamma \in \Gamma)$$

the definition of $\mathbf{P}(A|B)$ is thereby extended for $B \in \mathfrak{B}^* = \sum_{\gamma \in \Gamma} \mathfrak{B}_\gamma$. Thus the condition that it shall be possible to extend the conditional probability space in such a way that $\mathfrak{B}$ shall become additive, is necessary and sufficient for the existence of a dimensionally ordered generating set of measures. A. Csaszar [3] has found other necessary and sufficient conditions for the existence of a dimensionally ordered set of measures which generates a given conditional probability space; especially he has generalized the theorem given in the present paper by proving that for the existence of a dimensionally ordered set of measures which generates the given conditional probability space it is sufficient, that $\mathfrak{B}$ should be a quasi-additive class; the class $\mathfrak{B}$ of sets is called quasi-additive by Csaszar, if to any $B_1 \in \mathfrak{B}$ and $B_2 \in \mathfrak{B}$ there exists a $B_3 \in \mathfrak{B}$ such that $B_1 \subset B_3$, $B_2 \subset B_3$ and $\mathbf{P}(B_1|B_3) + \mathbf{P}(B_2|B_3) > 0$. An additive class is always quasi-additive, as $B_1 + B_2$ can be chosen for B_3. However the condition that $\mathfrak{B}$ should be quasi-additive is also not necessary.

We shall show in § 1 that in case $\mathfrak{B}$ is an additive class, any one of the measures μ_γ generating the given conditional probability space is uniquely determined, up to a positive constant factor, on a certain σ-ring A_γ^*. Without the supposition that $\mathfrak{B}$ is an additive class this is not true in general. This is an other argument in favour of postulating the additivity of $\mathfrak{B}$.

In § 2 some questions concerning the distribution or random variables defined on a conditional probability space are discussed.

The author is indebted to A. Csaszar and I. Czipszer for some valuable remarks.

§ 1. Conditional probability spaces in which the set of conditions is an additive class

In this § we shall make the following conventions concerning the symbol $+\infty$: $\frac{c}{0} = +\infty$, $\frac{c}{+\infty} = 0$, $c + \infty = +\infty$ if c is a positive number, further $+\infty . +\infty = +\infty$ *.

We shall prove the following

Theorem 1. *If* $\mathfrak{P} = [S, \mathfrak{A}, \mathfrak{B}, \mathbf{P}]$ *is a conditional probability space and* $\mathfrak{B}$ *is an additive class, then* $\mathfrak{P}$ *can be generated by a dimensionally ordered set of measures.*

To prove Theorem 1 we first prove the following

Lemma 1. *If* $\mathfrak{B}$ *is an additive class and* $B_i \in \mathfrak{B}$ $(i = 1, 2, 3)$, *we have*

$$\mathbf{P}(B_1|B_1 + B_2)\mathbf{P}(B_2|B_2 + B_3)\mathbf{P}(B_3|B_3 + B_1) = \\ = \mathbf{P}(B_2|B_1 + B_2)\mathbf{P}(B_3|B_2 + B_3)\mathbf{P}(B_1|B_3 + B_1). \tag{1}$$

Proof of Lemma 1. As it is supposed, that $\mathfrak{B}$ is an additive class, putting $B = B_1 + B_2 + B_3$ we have $B \in \mathfrak{B}$. Let j denote the number of those of the numbers $\mathbf{P}(B_i|B)$ $(i = 1, 2, 3)$ which are positive. As $\mathbf{P}(B_1|B) + \mathbf{P}(B_2|B) + \mathbf{P}(B_3|B) \geqslant \mathbf{P}(B|B) = 1$, we have $j \geqslant 1$. Thus

* Compare [4] p. 1. We follow [4] as regards the terminology of measure theory; thus especially we admit that a measure may take, on some sets, the value $+\infty$.

we have to distinguish three cases: 1) $j=3$, 2) $j=2$ and finally 3) $j=1$. We shall prove that (1) holds in any of the three cases. In case 1) we have $\mathbf{P}(B_h+B_i\,|\,B)>0$ for $i, h=1, 2, 3$ and thus by Axiom III

$$\mathbf{P}(B_i\,|\,B_h+B_i)=\frac{\mathbf{P}(B_i\,|\,B)}{\mathbf{P}(B_h+B_i\,|\,B)} \text{ for } i,\ h=1, 2, 3;$$

thus both sides of (1) are equal to $\frac{\mathbf{P}(B_i\,|\,B)\,\mathbf{P}(B_2\,|\,B)\,\mathbf{P}(B_3\,|\,B)}{\mathbf{P}(B_1+B_2\,|\,B)\,\mathbf{P}(B_2+B_3\,|\,B)\,\mathbf{P}(B_3+B_1\,|\,B)}$. In case 2) we may suppose that $\mathbf{P}(B_1\,|\,B)=0$, $\mathbf{P}(B_2\,|\,B)>0$ and $\mathbf{P}(B_3\,|\,B)>0$. It follows, that $\mathbf{P}(B_1+B_2\,|\,B)>0$ and $\mathbf{P}(B_1+B_3\,|\,B)>0$ and thus by Axiom III that $\mathbf{P}(B_1\,|\,B_1+B_2)=\frac{\mathbf{P}(B_1\,|\,B)}{\mathbf{P}(B_1+B_2\,|\,B)}=0$ and $\mathbf{P}(B_1\,|\,B_3+B_1)=\frac{\mathbf{P}(B_1\,|\,B)}{\mathbf{P}(B_1+B_3\,|\,B)}=0$; thus both sides of (1) are equal to 0. Finally in the case 3) we may suppose that $\mathbf{P}(B_1\,|\,B)=0$, $\mathbf{P}(B_2\,|\,B)=0$ and $\mathbf{P}(B_3\,|\,B)>0$ It follows that $\mathbf{P}(B_2+B_3\,|\,B)>0$ and $\mathbf{P}(B_3+B_1\,|\,B)>0$ and thus that $\mathbf{P}(B_2\,|\,B_2+B_3)=\frac{\mathbf{P}(B_3\,|\,B)}{\mathbf{P}(B_2+B_3\,|\,B)}=0$ and $\mathbf{P}(B_1\,|\,B_3+B_1)=\frac{\mathbf{P}(B_1\,|\,B)}{\mathbf{P}(B_3+B_1\,|\,B)}=0$. and thus both sides of (1) are equal to 0. Thus (1) holds in all three cases.

Let us turn now to the proof of Theorem 1. Let us introduce the notation

$$i(B_1, B_2)=\frac{\mathbf{P}(B_1\,|\,B_1+B_2)}{\mathbf{P}(B_2\,|\,B_1+B_2)}; \tag{2}$$

(2) should be understood in the sense that if the denominator is equal to 0, we have $i(B_1, B_2)=+\infty$; it should be noted that the nominator and the denominator of the fraction on the right-hand side of (2) can not both be equal to 0 as $\mathbf{P}(B_1\,|\,B_1+B_2)+\mathbf{P}(B_2\,|\,B_1+B_2)\geqslant 1$. We shall call $i(B_1, B_2)$ the *indicator* of the two sets B_1 and B_2. If for two sets, B_1 and B_2 we have $0<i(B_1, B_2)<+\infty$ we shall say that B_1 and B_2 are *of the same dimension*, and denote this by writing $B_1\sim B_2$.

Now we prove the following

Lemma 2. *The relation* $\sim$ *has the following properties*:

1) $B_1\sim B_1$

2) *If* $B_1\sim B_2$ *then* $B_2\sim B_1$

3) *If* $B_1\sim B_2$ *and* $B_2\sim B_3$ *then* $B_1\sim B_3$.

Proof of Lemma 2. 1) follows clearly from Axiom II. 2) is evident since if $B_1\sim B_2$ we have

$$i(B_2, B_1)=\frac{1}{i(B_1, B_2)}. \tag{3}$$

Let us remark that (3) remains valid also for any $B_1\in\mathfrak{B}$ and $B_2\in\mathfrak{B}$, as we agreed that $\frac{c}{0}=+\infty$ and $\frac{c}{+\infty}=0$ if $0<c<+\infty$. 3) follows from the fact that if $B_1\sim B_2$ and $B_2\sim B_3$ we may write (1) in the form

$$i(B_1, B_3)=i(B_1, B_2)\,i(B_2, B_3). \tag{4}$$

Clearly (4) is valid always (i. e. not only if $B_1\sim B_2\sim B_3$) except if one of the factors at the right of (4) is 0 and the other $+\infty$ as we have agreed that $c.+\infty=+\infty$ if $0<c<+\infty$ and $+\infty.+\infty=+\infty$. It follows from Lemma 2 that $\sim$ is an equivalence-relation. Thus the set $\mathfrak{B}$

is divided with respect to the relation $\sim$ in a system of mutually disjoint classes $\mathfrak{B}_\gamma$, every class consisting of sets which are mutually equivalent with each other. It is easy to show that a complete ordering of the classes $\mathfrak{B}_\gamma$ can be given as follows: let $\mathfrak{B}_\gamma$ and $\mathfrak{B}_\delta$ denote two disjoint classes. Let us choose an arbitrary element B_1 of $\mathfrak{B}_\gamma$ and an arbitrary element B_2 of $\mathfrak{B}_\delta$. Then only two cases are possible: either $i(B_1, B_2) = 0$ or $i(B_1, B_2) = +\infty$. As a matter of fact $0 < i(B_1, B_2) < +\infty$ is impossible, since this would imply that $B_1 \sim B_2$ and thus the classes $\mathfrak{B}_\gamma$ and $\mathfrak{B}_\delta$ would be identical, in contrary with our supposition that $\mathfrak{B}_\gamma$ and $\mathfrak{B}_\delta$ are different classes with respect to the relation $\sim$. If $i(B_1, B_2) = 0$ we shall put $\mathfrak{B}_\gamma < \mathfrak{B}_\delta$; if $i(B_1, B_2) = +\infty$ we shall put $\mathfrak{B}_\delta < \mathfrak{B}_\gamma$. To show that in this way a complete ordering of the classes $\mathfrak{B}_\gamma$ is obtained, it suffices to prove that the particular choice of the sets $B_1 \in \mathfrak{B}_\gamma$ and $B_2 \in \mathfrak{B}_\delta$ is irrelevant, further that the relation $<$ introduced between the classes $\mathfrak{B}_\gamma$ is transitive, i. e. if $\mathfrak{B}_\gamma < \mathfrak{B}_\delta$ and $\mathfrak{B}_\delta < \mathfrak{B}_\varepsilon$ we have $\mathfrak{B}_\gamma < \mathfrak{B}_\varepsilon$. To prove the first assertion it suffices to show that if $B_1 \in \mathfrak{B}_\gamma$, $B_1' \in \mathfrak{B}_\gamma$ and $B_2 \in \mathfrak{B}_\delta$ further if $i(B_1, B_2) = 0$ we have also $i(B_1', B_2) = 0$. This however is a consequence of the relation (4) applied to the sets B_1', B_1, B_2, which is permissible as $B_1' \sim B_1$,

The transitivity of the relation follows also from (4). As a matter of fact if $\mathfrak{B}_\gamma < \mathfrak{B}_\delta$ and $\mathfrak{B}_\delta < \mathfrak{B}_\varepsilon$, let us choose sets $B_1 \in \mathfrak{B}_\gamma$, $B_2 \in \mathfrak{B}_\delta$, $B_3 \in \mathfrak{B}_\varepsilon$. It follows that $i(B_1, B_2) = 0$ and $i(B_2, B_3) = 0$, and thus by (4) that $i(B_1, B_3) = 0$. It is clear that each $\mathfrak{B}_\gamma$ is an additive class, because if $B_1 \sim B_2$ we have

$$i(B_1 + B_2, B_1) = \frac{1}{\mathbf{P}(B_1 \mid B_1 + B_2)}$$

and thus $0 < i(B_1 + B_2, B_1) < +\infty$, which means that $B_1 + B_2 \sim B_1$. If $B_1 \in \mathfrak{B}_\gamma$ and $B_2 \in \mathfrak{B}_\delta$ where $\mathfrak{B}_\gamma < \mathfrak{B}_\delta$ we have $B_1 + B_2 \in \mathfrak{B}_\gamma$; as a matter of fact if $\mathbf{P}(B_1 \mid B_1 + B_2) = 0$ then $\mathbf{P}(B_2 \mid B_1 + B_2) = 1$ and thus

$$i(B_1 + B_2, B_2) = 1.$$

Now let us introduce corresponding to every class $\mathfrak{B}_\gamma$ the set function $\mu_\gamma(B)$ $(B \in \mathfrak{B}_\gamma)$ by choosing an arbitrary element B_0 of $\mathfrak{B}_\gamma$ and putting

$$\mu_\gamma(B) = i(B, B_0) \quad \text{for } B \in \mathfrak{B}_\gamma. \tag{5}$$

Clearly we have $0 < \mu_\gamma(B) < +\infty$ for $B \in \mathfrak{B}_\gamma$. We define further μ_γ for any set which can be represented in the form AB where $A \in \mathfrak{A}$ and $B \in \mathfrak{B}_\gamma$, by putting

$$\mu_\gamma(AB) = \mathbf{P}(A \mid B)\, \mu_\gamma(B). \tag{6}$$

It is easy to see that the value of $\mu_\gamma(C)$ does not depend on the particular representation of the set C in the form $C = AB$, $(A \in \mathfrak{A}, B \in \mathfrak{B}_\gamma)$ which has been chosen. As a matter of fact, if $C = AB = A'B'$ where $A \in \mathfrak{A}$, $B \in \mathfrak{B}_\gamma$, and $A' \in \mathfrak{A}$, $B' \in \mathfrak{B}_\gamma$ we have by Axiom III $\mathbf{P}(C \mid B) = \frac{\mathbf{P}(C \mid B + B')}{\mathbf{P}(B \mid B + B')}$ and $\mathbf{P}(C \mid B') = \frac{\mathbf{P}(C \mid B + B')}{\mathbf{P}(B' \mid B + B')}$, and thus, using the relation $\mathbf{P}(A \mid B) = \mathbf{P}(AB \mid B)$, we have

$$\mathbf{P}(A \mid A)\, \mu_\gamma(B) = \mathbf{P}(C \mid B)\, i(B, B_0) = \mathbf{P}(C \mid B')\, i(B', B)\, i(B, B_0) =$$
$$= \mathbf{P}(C \mid B')\, i(B' \mid B_0) = \mathbf{P}(A \mid B')\, \mu_\gamma(B').$$

Denoting by $\mathfrak{A}_\gamma$ the set of those sets $C \in \mathfrak{A}$ which can be represented in the form $C = AB$ with $A \in \mathfrak{A}$ and $B \in B_\gamma$ it is easy to see that $\mathfrak{A}_\gamma$ is a ring. Now we prove the following

Lemma 3. *The set function* $\mu_\gamma(A)$ *is a measure on the ring* $\mathfrak{A}_\gamma$.

Proof of Lemma 3. First we prove that $\mu_\gamma(A)$ is finitely additive on $\mathfrak{A}_\gamma$. Let us suppose that $C_1 = A_1 B_1$ and $C_2 = A_2 B_2$ where $A_i \in \mathfrak{A}$ and $B_i \in \mathfrak{B}_\gamma (i = 1, 2)$ further that $C_1 C_2 = O$. *

As $A_i B_i = A_i B_i (B_1 + B_2) = A_i' (B_1 + B_2)$ where $A_i' \in \mathfrak{A}$ $(i = 1, 2)$ and $B_1 + B_2 \in \mathfrak{B}_\gamma$, we may suppose that $C_1 = A_1 B$ and $C_2 = A_2 B$ where $A_i \in \mathfrak{A}$ $(i = 1, 2)$, $B \in \mathfrak{B}_\gamma$. We may suppose also that $A_i \subset B (i = 1, 2)$, as $A_i B = (A_i B) B$ and $A_i B \subset B$. In this case $C_1 C_2 = O$ implies $A_1 A_2 = O$. Thus we have

$$\mu_\gamma(C_1 + C_2) = \mu_\gamma((A_1 + A_2) B) = (\mathbf{P}(A_1 \mid B) + \mathbf{P}(A_2 \mid B)) \mu_\gamma(B) = \\ = \mu_\gamma(C_1) + \mu_\gamma(C_2).$$

Now let us prove that μ_γ is also countably additive on $\mathfrak{A}_\gamma$. If $C_n \in \mathfrak{A}_\gamma$ $(n = 1, 2, \ldots)$ $C_k \cdot C_l = O$ if $k \neq l$ $(k, l = 1, 2, \ldots)$ and $\sum_{n=1}^{\infty} C_n = C \in \mathfrak{A}_\gamma$ we may put $C_n = A_n B_n$ and $C = AB$ where $B_n \in \mathfrak{B}_\gamma$ and $A_n \in \mathfrak{A}$ $(n = 1, 2, \ldots)$ further $B \in \mathfrak{B}_\gamma$ and $A \in \mathfrak{A}$. As $A_n B_n \subset AB$ we may put $C_n = A_n B_n = A_n B_n AB = (A_n B_n AB) B = A_n' B$ where $A_n' \subset B$. It follows that $A_k' \cdot A_l' = O$ for $k \neq l$ and thus that

$$\mu_\gamma(C) = \mu_\gamma(AB) = \mathbf{P}(A \mid B) \mu_\gamma(B) = \mathbf{P}(AB \mid B) \mu_\gamma(B) = \\ = \sum_{n=1}^{\infty} \mathbf{P}(A_n' \mid B) \mu_\gamma(B) = \sum_{n=1}^{\infty} \mu_\gamma(A_n' B) = \sum_{n=1}^{\infty} \mu_\gamma(C_n),$$

which proves Lemma 3.

According to a well-known theorem (see [4], p. 54) the definition of μ_γ can be extended to the least σ-ring $\mathfrak{A}_\gamma^*$ containing $\mathfrak{A}_\gamma$. Thus μ_γ is defined for every set $A \in \mathfrak{A}$ which can be covered by a countable sequence $\{B_k\}$ of sets $B_k \in \mathfrak{B}_\gamma (k = 1, 2, \ldots)$. As a matter of fact if $A \subset \sum_{n=1}^{\infty} B_k$ where $A \in \mathfrak{A}$ and $B_k \in \mathfrak{B}_\gamma (k = 1, 2, \ldots)$ we have $A = \sum_{k=1}^{\infty} AB_k$ and thus $A \in \mathfrak{A}_\gamma^*$. For those sets $A \in \mathfrak{A}$ for which such a covering does not exist, we put $\mu_\gamma(A) = +\infty$. Thus μ_γ is extended to the whole σ-algebra $\mathfrak{A}$. It is clear that if $B \in \mathfrak{B}_\gamma$ and $A \in \mathfrak{A}$ we have from (6)

$$\mu_\gamma(AB) = \mathbf{P}(A \mid B) \mu_\gamma(B)$$

and thus

$$\mathbf{P}(A \mid B) = \frac{\mu_\gamma(AB)}{\mu_\gamma(B)}. \tag{7}$$

To complete the proof of Theorem 1 we have only to prove that the system $\{\mu_\gamma\}$ of measures satisfies all requirements of Theorem 1. Thus we have to prove that to any $B \in \mathfrak{B}$ there exists a unique class $\mathfrak{B}_\beta$ such that

* Here and in what follows O denotes the empty set.

$0 < \mu_\beta(B) < +\infty$ and that if $\mathfrak{B}_\beta < \mathfrak{B}_\gamma$ we have $\mu_\gamma(B) = 0$. But this is clear, as any $B \in \mathfrak{B}$ belongs to a uniquely determined class $\mathfrak{B}_\beta$, and if $\mathfrak{B}_\beta < \mathfrak{B}_\gamma$ and B_1 is an arbitrary element of $\mathfrak{B}_\gamma$ we have $B + B_1 \in \mathfrak{B}_\gamma$ and thus by (6)

$$\mu_\gamma(B) = \mu_\gamma(B(B + B_0)) = \mathbf{P}(B \mid B + B_0)\,\mu_\gamma(B + B_0) = 0.$$

Thus Theorem 1 is proved.

It is easy to find a necessary and sufficient condition ensuring that the set $\{\mu_\gamma\}$ should consist of a single measure μ. As a matter of fact, it can be seen from the proof of Theorem 1, that this takes place if and only if any two elements of $\mathfrak{B}$ are equivalent, i. e. if $\mathbf{P}(B_1 \mid B_1 + B_2)\,\mathbf{P}(B_2 \mid B_1 + B_2) > 0$ for any $B_1 \in \mathfrak{B}$ and $B_2 \in \mathfrak{B}$.

It can be easily shown that if $\mathfrak{B}$ is an additive class, the measures μ_γ generating the conditional probability space $\mathfrak{P}$ are determined by $\mathfrak{P}$ uniquely up to a constant factor. To show this we start from the fact, that the equivalence relation $\sim$ and thus the classes $\mathfrak{B}_\gamma$ are uniquely determined by the conditional probability field, as well as by a set $\{\mu_\gamma\}$ of measures generating the conditional probability field. As a matter of fact $B_1 \sim B_2$ if and only if $\mathbf{P}(B_1 \mid B_1 + B_2)\,\mathbf{P}(B_2 \mid B_1 + B_2) > 0$, further if and only if $\mu_\gamma(B_1)$ and $\mu_\gamma(B_2)$ are for the same $\gamma \in \Gamma$ equal to 0, to some positive number, and to $+\infty$. Thus in proving that the measures μ_γ are uniquely determined up to a constant factor, we may restrict ourselves to a class $\mathfrak{B}_\gamma$. If μ_γ and ν_γ are measures on $\mathfrak{A}$, $0 < \mu_\gamma(B) < +\infty$ and $0 < \nu_\gamma(B) < +\infty$ for $B \in \mathfrak{B}_\gamma$ further $\mathbf{P}(A \mid B) = \frac{\mu_\gamma(AB)}{\mu_\gamma(B)} = \frac{\nu_\gamma(AB)}{\nu_\gamma(B)}$ for any $B \in \mathfrak{B}_\gamma$ and $A \in \mathfrak{A}$, let us choose an arbitrary $B_0 \in \mathfrak{B}_\gamma$ and put $\mu_\gamma^*(B) = \frac{\mu_\gamma(B)}{\mu_\gamma(B_0)}$ and $\nu_\gamma^*(B) = \frac{\nu_\gamma(B)}{\nu_\gamma(B_0)}$. Thus we have $\mathbf{P}(A \mid B) = \frac{\mu_\gamma^*(AB)}{\mu_\gamma^*(B)} = \frac{\nu_\gamma^*(AB)}{\nu_\gamma^*(B)}$ and as $\mu_\gamma^*(B_0) = \nu_\gamma^*(B_0) = 1$ we have $\mu_\gamma^*(C) = \nu_\gamma^*(C)$ for any $C \in \mathfrak{A}$ for which $C \subset B_0$. Now let us choose an arbitrary $B \in \mathfrak{B}_\gamma$; then

$$\mathbf{P}(B \mid B + B_0) = \frac{\mu_0^*(B)}{\mu_\gamma^*(B + B_0)} = \frac{\nu_\gamma^*(B)}{\nu_\gamma^*(B + B_0)}.$$

But $\mu_\gamma^*(B + B_0) = \mu_\gamma^*(B) + \mu_\gamma^*(B_0) - \mu_\gamma^*(BB_0)$ and $\nu_\gamma^*(B + B_0) = \nu_\gamma^*(B) + \nu_\gamma^*(B_0) - \nu_\gamma^*(BB_0)$ and owing to $BB_0 \subset B$ it follows that $\nu_\gamma^*(BB_0) = \mu_\gamma^*(BB_0)$. Thus we have $\frac{\mu_\gamma^*(B)}{\mu_\gamma^*(B) + 1 - \mu_\gamma^*(BB_0)} = \frac{\nu_\gamma^*(B)}{\nu_\gamma^*(B) + 1 - \mu_\gamma^*(BB_0)}$ which implies $\mu_\gamma^*(B) = \nu_\gamma^*(B)$. Thus μ_γ^* and ν_γ^* coincide for $\mathfrak{B}_\gamma$ and thus for $\mathfrak{A}_\gamma^*$ i. e. we have $\mu_\gamma(A) = c\nu_\gamma(A)$ for $A \in \mathfrak{A}_\gamma^*$ where $c = \frac{\mu_\gamma(B_0)}{\nu_\gamma(B_0)} > 0$.

As regards sets not contained in $\mathfrak{A}_\gamma^*$, μ_γ and ν_γ may not coincide. This is shown by the following example: Let S be the set of real numbers, $\mathfrak{A}$ the set of all Borel-subsets of S and $\mathfrak{B}$ the set of all non-empty finite subsets of the set of integers. Let us define $\mathbf{P}(A \mid B)$ for $B \in \mathfrak{B}$ and $A \in \mathfrak{A}$ as the ratio of the number of elements of AB and the

number of elements of B (B and AB both being finite subsets of the set of all integers). Now we have

$$\mathbf{P}(A \mid B) = \frac{\nu(AB)}{\nu(B)} = \frac{\mu(AB)}{\mu(B)},$$

where $\nu(A)$ is defined as follows: $\nu(A)$ is equal to the number of elements of the set A if A is a finite subset of the set of integers, and $\nu(A) = +\infty$ if A is an infinite set of integers, or a set of real numbers which contains at least one not integer number, and $\mu(A)$ is defined for any set A of real numbers as the number of integers contained in A. Clearly $\nu(A)$ and $\mu(A)$ coincide if A is a subset of the set of integers, but are not identical, as for instance if A is the set consisting of the two numbers 0 and $\frac{1}{2}$ we have $\nu(A) = +\infty$ and $\mu(A) = 1$. It should be mentioned, that if $\mathfrak{P}$ is a conditional probability space which can be generated by a system $\{\mu_\gamma\}$ of dimensionally ordered measures, but $\mathfrak{B}$ is not an additive class, the measures μ_γ are still less determined. For example let us consider the conditional probability space $\mathfrak{P} = [S, \mathfrak{A}, \mathfrak{B}, \mathbf{P}]$ where S denotes the set of real numbers $\mathfrak{A}$ the set of all Borel-subsets of S and let us have $\mathfrak{B} = \mathfrak{B}_+ + \mathfrak{B}_-$ where $\mathfrak{B}_+$ is the set of all sets belonging to $\mathfrak{A}$ which have a finite and positive Lebesgue-measure and are situated entirely in the interval $(0, +\infty)$, and $\mathfrak{B}_-$ the set of all sets belonging to $\mathfrak{A}$ which have a finite and positive Lebesgue-measure and are entirely situated in the interval $(-\infty, 0)$. Let us put further $\mathbf{P}(A \mid B) = \frac{m(AB)}{m(B)}$, where m denotes the Lebesgue-measure. The conditional probability space $\mathfrak{P}$ can therefore be generated by a single measure. Now let $m_+(A)$ be equal to the Lebesgue-measure of that part of A which is situated in the interval $(0, +\infty)$ and let $m_-(A)$ be equal to the Lebesgue-measure of the set A if $m_+(A) = 0$, and $m_-(A) = +\infty$ if $m_+(A) > 0$. Then we have clearly $\mathbf{P}(A \mid B) = \frac{m_+(AB)}{m_+(B)}$ for $B \in \mathfrak{B}_+$ and $\mathbf{P}(A \mid B) = \frac{m_-(AB)}{m_-(B)}$ if $B \in \mathfrak{B}_-$, and thus our conditional probability space is also generated by the set (m_-, m_+) of two dimensionally ordered measures; (that fact that m_- and m_+ are dimensionally ordered, is evident as if $m_-(B) < +\infty$ we have $m_+(B) = 0$ by definition). Thus the space $\mathfrak{P}$ can be generated either by the single measure m or by the two measures m_- and m_+ which are dimensionally ordered. This example shows that without supposing the additivity of $\mathfrak{B}$ the number of elements of the set $\{\mu_\gamma\}$ is also generally not determined.

§ 2. Random variables and their distributions

A random variable on a conditional probability space $\mathfrak{P} = [S, \mathfrak{A}, \mathfrak{B}, \mathbf{P}]$ is defined as a real-valued function $\xi = \xi(s)$ $(s \in S)$ which is measurable with respect to $\mathfrak{A}$. Clearly $\xi = \xi(s)$, when considered on the ordinary probability space $\mathfrak{P}_B = [S, \mathfrak{A}, \mathbf{P}_B(A)]$ where $B \in \mathfrak{B}$ is fixed and $\mathfrak{P}_B(A) = \mathbf{P}(A \mid B)$, is an ordinary random variable. The probability distribution of ξ with respect to the probability space $\mathfrak{R}_B$ is called the conditional probability distribution of ξ with respect to B. The probability distribu-

tion of ξ can however be investigated also from an other point of view. Let us denote by E the set of all real numbers, by $\mathbf{A}$ the set of all Borel-sets of E and if $\alpha \in \mathbf{A}$, by $\xi^{-1}(\alpha)$ we denote the set consisting of those $s \in S$ for which $\xi(s) \in \alpha$. Let $\mathbf{B}$ denote the set consisting of those $\beta \in \mathbf{A}$ for which $\xi^{-1}(\beta) \in \mathfrak{B}$. If $\mathbf{B}$ is not empty, putting $\pi(\alpha \mid \beta) = \mathbf{P}(\xi^{-1}(\alpha) \mid \xi^{-1}(\beta))$ if $\alpha \in \mathbf{A}$ and $\beta \in \mathbf{B}$, we obtain a conditional probability space $[E, \mathbf{A}, \mathbf{B}, \pi]$.

If $\mathfrak{B}$ is an additive class, then so is $\mathbf{B}$, and thus the conditional probability space $[E, \mathbf{A}, \mathbf{B}, \pi]$ can be generated by a dimensionally ordered set $\{\nu_\gamma\}$ of measures. If the conditional probability space $[S, \mathfrak{A}, \mathfrak{B}, \mathbf{P}]$ is generated by the set $\{\mu_\gamma;\ \gamma \in \Gamma\}$ of measures, let us denote by $\mathbf{B}_\delta$ the set of those $\beta \in \mathbf{B}$ for which $\xi^{-1}(\beta) \in \mathfrak{B}_\delta$ and by Δ the subset of Γ consisting of those $\delta \in \Gamma$ for which $\mathbf{B}_\delta$ is not empty. In this case $\mathbf{B}_\delta$ is also an additive class, and we have $\nu_\delta(\alpha\beta) = \pi(\alpha \mid \beta)\,\mu_\delta(\xi^{-1}(\beta))$, if $\alpha \in \mathbf{A}$ and $\beta \in \mathbf{B}_\delta$, where $\delta \in \Delta$. For an arbitrary $\delta \in \Delta$ we may call the set function ν_δ the distribution of dimension δ of the random variable ξ. If Δ consists of a single element, i. e. the space $[E, \mathbf{A}, \mathbf{B}, \pi]$ is generated by a single measure ν and all sufficiently large intervals $(-a, +a)$ belong to $\mathbf{B}$ there exists a non-decreasing function $F(x)$ defined for $-\infty < x < +\infty$ such that if $[a, b)$ denotes the interval $a \leqslant x < b$, we have $\nu([a, b]) = F(b) - F(a)$. In this case the function $F(x)$ may be called the *generalized distribution function* of the random variable ξ. If $F(x)$ is absolutely continuous in any finite interval of the real axis, we may call its derivative $F'(x) = f(x)$, *the generalized density function* of the random variable ξ.

Every distribution ν_δ of ξ of given dimension δ is determined only up to a positive constant factor; thus the generalized distribution function $F(x)$ of ξ (if it exists) is determined only up to a linear transformation; more exactly if $F(x)$ is a distribution function of the random variable ξ then $cF(x) + d$ where $c > 0$ and d is an arbitrary real number, is also a disribution function of ξ. A generalized distribution function is a non-decreasing function, continuous to the right; $F(x)$ may be not bounded. It is evident that if $F(x)$ is a (generalized) distribution function of ξ and $[a, b)$ is an interval which belongs to $\mathbf{B}$ we have for $a \leqslant a_1 \leqslant b_1 \leqslant b$.

$$P(a_1 \leqslant \xi < b_1 \mid a \leqslant \xi < b) = \frac{F(b_1) - F(a_1)}{F(b) - F(a)}\,.$$

Clearly if the generalized density function $f(x)$ of ξ exists, it is determined only up to a positive constant factor.

A generalized density function $f(x)$ is always a non-negative measurable function, which is integrable in any finite interval; of course $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dx$ may not exist. If $[a, b)$ belongs to $\mathbf{B}$ we have for $a \leqslant a_1 \leqslant b_1 \leqslant b$

$$P(a_1 \leqslant \xi < b_1 \mid a \leqslant \xi < b) = \frac{\int_{a_1}^{b_1} f(x)\,dx}{\int_{a}^{b} f(x)\,dx}\,.$$

The generalized distribution function anb density function of vector-valued random variables can be defined similarly.

Mathematical Institute of the Hungarian Academy of Sciences

Поступила в редакцию
10.12.55

REFERENCES

[1] B. Rényi, On a new axiomatic theory of probability. Acta Math. Acad. Sci. Hung. (In print).
[2] A. N. Kolmogoroff, Grundbegriffe der Wahrscheinlichkeitsrechnung. Springer, Berlin, 1933.
[3] A. Csaszar, Sur la structure des espaces de probabilité conditionelle. Acta Math. Acad. Sci. Hung. (In print).
[4] P. Halmos, Measure theory. Van Nostrand, New-York, 1951.

О ПРОСТРАНСТВАХ С УСЛОВНЫМИ ВЕРОЯТНОСТЯМИ, ПОРОЖДЕННЫМИ РАЗМЕРНОСТНО-УПОРЯДОЧЕННЫМ МНОЖЕСТВОМ МЕР

А. РЕНЬИ (БУДАПЕШТ)

(Резюме)

Вводится понятие «пространства с условными вероятностями», определяемое как совокупность $[S, \mathfrak{A}, \mathfrak{B}, \mathbf{P}]$, где S — абстрактное пространство, $\mathfrak{A}$ — σ-алгебра подмножеств S и $\mathfrak{B}$ — непустое подмножество $\mathfrak{A}$; $\mathbf{P}(A \mid B)$—функция на $\mathfrak{A} \times \mathfrak{B}$, являющаяся мерой по A и удовлетворяющая некоторым условиям по B.

Всякое «пространство с вероятностями» порождает естественным образом «пространство с условными вероятностями», но последнее может и не порождаться никаким «пространством с вероятностями». Дается способ построения всех «пространств с условными вероятностями».

ТЕОРИЯ ВЕРОЯТНОСТЕЙ
И ЕЕ ПРИМЕНЕНИЯ
Том I *1956* *Выпуск 1*

ЦЕНТРАЛЬНАЯ ПРЕДЕЛЬНАЯ ТЕОРЕМА ДЛЯ НЕОДНОРОДНЫХ ЦЕПЕЙ МАРКОВА. I.

Р. Л. ДОБРУШИН

§ 1. Введение

1.1. Изучение условий применимости центральной предельной теоремы к неоднородным цепям Маркова было начато еще самим А. А. Марковым в 1910 году. Марков показал [26], что если при каждом n величины $X_1^{(n)},\dots, X_n^{(n)}$ образуют последовательность случайных величин, принимающих два значения 0 и 1 и связанных в неоднородную цепь (общий случай величин, связанных в цепь с $N=2$ состояниями, легко сводится к этому частному случаю), и $S^{(n)} = X_1^{(n)} + \dots + X_n^{(n)}$, то для асимптотической нормальности нормированных сумм

$$\overline{S}^{(n)} = \frac{S^{(n)} - \mathbf{M}\, S^{(n)}}{\sqrt{\mathbf{D}\, S^{(n)}}} \tag{1.1}$$

достаточно, чтобы при всех n и k и некотором $\alpha > 0$

$$\begin{aligned} \alpha^{(n)} &\leqslant \mathbf{P}\{X_k^{(n)} = 1 \mid X_{k-1}^{(n)} = 1\} \leqslant 1 - \alpha^{(n)}, \\ \alpha^{(n)} &\leqslant \mathbf{P}\{X_k^{(n)} = 0 \mid X_{k-1}^{(n)} = 0\} \leqslant 1 - \alpha^{(n)} \end{aligned} \tag{1.2}$$

и $\alpha^{(n)} \geqslant \alpha$. Марков использовал при этом развитый им метод моментов. Там же Марков указал, что трудный вопрос о возможном сокращении введенных им ограничений остается открытым для других исследователей.

Следующий шаг в изучении этого вопроса был сделан С. Н. Бернштейном. В своей опубликованной в 1922 году работе [1] Бернштейн рассматривал проблему, поставленную Марковым, как частный случай более общего вопроса об условиях асимптотической нормальности сумм слабо зависимых величин и показал, в частности, что нормированные суммы (1.1) асимптотически нормальны, если величины $\alpha^{(n)}$ из (1.2) удовлетворяют условию $\alpha^{(n)} n^{\frac{1}{7}-\varepsilon} \to \infty$ при некотором $\varepsilon > 0$. В своей ставшей теперь классической работе 1926 года [2] Бернштейн усилил свой результат и доказал, что асимптотическая нормальность имеет место при $\alpha^{(n)} n^{\frac{1}{5}-\varepsilon} \to \infty$, где $\varepsilon > 0$. Кроме того, он построил в той же работе пример, показывающий, что при $\alpha^{(n)} \sim c n^{-\frac{1}{3}}$, где c $(0 < c < \infty)$ — постоянная, последовательность $\overline{S}^{(n)}$ может иметь предельное распределение, отличное от нормального. (Этот пример подробно разбирается в § 2 нашей

работы). Дальнейшее уточнение границ действия центральной предельной теоремы требовало более глубокого изучения самой цепи Маркова. Это было сделано Бернштейном в работах 1926—1928 годов [3] и [4]. Там была доказана достаточность условия $\alpha^{(n)} n^{\frac{1}{3}-\varepsilon} \to \infty$. Наконец, лишь в 1947 году Н. А. Сапогов [26] получил, развивая методы Бернштейна, оптимально возможный результат, показав, что асимптотическая нормальность имеет место, если $\alpha^{(n)} n^{\frac{1}{3}} \to \infty$. Очередная проблема состояла в изучении цепи Маркова с числом состояний N большим, чем 2. Эта проблема ставится следующим образом: пусть при фиксированном n величины $X_1^{(n)}, \ldots, X_n^{(n)}$ связаны в (неоднородную) цепь Маркова. Пусть далее каждая из величин $X_i^{(n)}$ принимает лишь конечный набор из N числовых значений $(a_{i1}^{(n)}, \ldots, a_{iN}^{(n)})$. (Предполагается, что все $|a_{ij}^{(n)}| < K < \infty$).

Пусть, наконец,

$$\alpha^{(n)} = \min \mathbf{P}\{X_i^{(n)} = a_{ik}^{(n)} \mid X_{i-1}^{(n)} = a_{i-1,j}^{(n)}\}, \tag{1.3}$$

где минимум берется по всем $i = 2, \ldots, n$; $j = 1, \ldots, N$, $k = 1, \ldots, N$. Пусть снова $S^{(n)} = X_1^{(n)} + \ldots + X_n^{(n)}$ и $\bar{S}^{(n)}$ определено, как и в (1.1). Требуется установить условия, которые надо наложить на $\alpha^{(n)}$ для того, чтобы $\bar{S}^{(n)}$ имело при $n \to \infty$ асимптотически нормальное распределение. Методы, развитые в цитированных выше работах С. Н. Бернштейна, существенно использовали наличие лишь двух состояний. Один из труднейших моментов при доказательстве центральной предельной теоремы для неоднородных цепей Маркова состоит в получении оценки снизу для дисперсий, т. е. в доказательстве того, что $\mathbf{D}\bar{S}^{(n)} \to \infty$ достаточно быстро. (Дело в том, что для величин, связанных в цепь, дисперсия суммы не равна сумме дисперсий, и поэтому $\mathbf{D}\bar{S}^{(n)}$ может расти много медленнее, чем n.) Оптимально точные оценки дисперсий снизу были получены Бернштейном в специальной работе [5] в 1936 году. Для этого Бернштейн создал новый метод изучения цепи Маркова, известный как «метод сечений». Идея этого метода основывается на том, что если $1 = i_1 < i_2 < \ldots < i_k = n$, то при условии, что фиксированы значения $X_{i_1}^{(n)} = x_1, X_{i_2}^{(n)} = x_2, \ldots, X_{i_k}^{(n)} = x_k$ суммы $\tilde{S}_r = X_{i_r+1}^{(n)} + \ldots + X_{i_{r+1}}^{(n)}$ оказываются независимыми случайными величинами. Основываясь на принадлежащих Бернштейну оценках дисперсии и предельных теоремах для сумм слабо зависимых величин, Н. А. Сапогов [27] в 1947 году показал, что условие $\alpha^{(n)} n^{\frac{1}{5}-\varepsilon} \to \infty$ достаточно для асимптотической нормальности $\bar{S}^{(n)}$. Ю. В. Линник дал в 1948 году ([23], [24]) глубокое обобщение метода сечений Бернштейна и применил его к изучению старших моментов величин $S^{(n)}$. В результате он показал асимптотическую нормальность $\bar{S}^{(n)}$ при условии $\alpha^{(n)} n^{\frac{1}{3}-\varepsilon} \to \infty$.

Кроме того, Сапогов [30] рассмотрел случай величин $X_i^{(n)}$, принимающих значение на отрезке действительной оси. В этом случае через $\alpha^{(n)}$ обозначается нижняя грань плотностей вероятностей перехода, задающих такую цепь. Используя оценки дисперсии Бернштейна, Сапогов доказал центральную предельную теорему при условии $\alpha^{(n)} n^{\frac{1}{5}-\varepsilon} \to \infty$. Для большей наглядности сведем перечисленные результаты в таблицу:

Условия на переходной вероятности	Число состояний		
	2	$2 < N < \infty$	Отрезок действ. оси
$\alpha^{(n)} > c > 0$	Марков 1910	Бернштейн 1936, Сапогов 1947	
$\alpha^{(n)} n^{\frac{1}{7}-\varepsilon} \to \infty$	Бернштейн 1922		
$\alpha^{(n)} n^{\frac{1}{5}-\varepsilon} \to \infty$	Бернштейн 1926		
$\alpha^{(n)} n^{\frac{1}{3}-\varepsilon} \to \infty$	Бернштейн 1928	Линник 1948	—
$\alpha^{(n)} n^{\frac{1}{2}} \to \infty$	Сапогов 1947	—	—

1.2. Мы перечислили все работы, содержащие общие результаты по интересующему нас вопросу *. Укажем на некоторые проблемы, оставшиеся после этих далеко идущих исследований:

1) Не было доведено до конца изучение условий центральной предельной теоремы при ограничениях, накладываемых на нижнюю грань вероятностей перехода (прочерки в приведенной выше таблице).

2) Ясно, что факт действия центральной предельной теоремы объясняется «почти независимостью» далеких друг от друга слагаемых и не связан с конкретной природой множества состояний системы (конечное множество, отрезок и т. д.). Поэтому кажется желательным установить условия асимптотической нормальности, верные для любого множества состояний.

3) По тем же причинам кажутся слишком узкими достаточные условия, не допускающие обращения в нуль ни одной вероятности перехода. Отметим один интересный результат в этом направлении. Сапогов [30] рассмотрел случай, когда состояний конечное число и в каждой матрице перехода имеется столбец, все элементы которого больше $\beta^{(n)}$. Он доказал центральную предельную теорему при условии $\beta^{(n)} n^{\frac{1}{7}-\varepsilon} \to \infty$. Однако этот результат является довольно частным. Ясно, что асимптотическая нормальность связана с некоторыми едиными для любых множеств состояний условиями, обеспечивающими «достаточную эргодичность» цепи, а этому не препятствует обращение в нуль многих из вероятностей перехода. Кажется интересным указать такие условия.

4) До сих пор не было существенных результатов, относящихся к неограниченным $X_i^{(n)}$. Представляется интересным, в частности, установить, будет ли в этом случае число $1/3$ играть такую же экстремальную роль, как и в случае ограниченных слагаемых.

Настоящая работа посвящена устранению перечисленных пробелов. Некоторые из ее результатов были опубликованы в заметке [13].

---

* Теорема, содержащаяся в § 79 книги В. И. Романовского [27], является ошибочной. Ей противоречат, например, результаты [35]. Другой противоречащий пример будет приведен в следующей части нашей работы. См. также примечание к стр. 83—84.

1.3. Дадим точное и общее определение последовательности случайных величин, связанных в цепь Маркова *.

Пусть заданы два произвольных множества Ψ и $\overline{\Psi}$ и пусть на множестве Ψ выделена некоторая σ-алгебра ** $\mathfrak{R}$ его подмножеств, а на множестве $\overline{\Psi}$ выделена σ-алгебра $\overline{\mathfrak{R}}$. Пусть задана функция $P(\psi, \overline{R})$, где $\psi \in \Psi$, $\overline{R} \in \overline{\mathfrak{R}}$, обладающая следующими двумя свойствами:

а) При фиксированном $\psi \in \Psi$ функция $P(\psi, \overline{R})$ как функция от $\overline{R}$ является вероятностной мерой на $\overline{\mathfrak{R}}$.

б) При фиксированном $\overline{R} \in \overline{\mathfrak{R}}$ функция $P(\psi, \overline{R})$ как функция от ψ является измеримой относительно $\mathfrak{R}$.

Такая функция $P(\psi, \overline{R})$ называется переходной вероятностной функцией с областью определения $(\Psi, \mathfrak{R}, \overline{\Psi}, \overline{\mathfrak{R}})$.

Пусть заданы произвольные множества Ω_i, $i = 1, \ldots, n$. Множество Ω_i называется пространством состояний системы в i-ый момент времени. Пусть на каждом из пространств Ω_i выделена некоторая σ-алгебра $\mathfrak{A}_i$ его подмножеств, называемых измеримыми. Пусть далее задана последовательность переходных вероятностных функций $P_i(\omega, A)$, $i = 1, \ldots, n$, причем функция $P_i(\omega, A)$ имеет область определения $(\Omega_i, \mathfrak{A}_i, \Omega_{i+1}, \mathfrak{A}_{i+1})$. Тогда функция $P_i(\omega, A)$ называется i-ой переходной функцией марковского процесса. Пусть, наконец, задана вероятностная мера $P(A)$ для $A \in \mathfrak{A}_1$, называемая начальным распределением вероятностей.

В качестве основного пространства элементарных исходов нашего процесса возьмем декартово произведение $(\Omega_1 \times \Omega_2 \times \ldots \times \Omega_n, \mathfrak{A}_1 \times \mathfrak{A}_2 \times \ldots \times \mathfrak{A}_n)$, то есть множество Ω последовательностей $(\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_n)$ с заданной на нем σ-алгеброй множеств $\mathfrak{A}$, порожденной множествами вида $\{\omega_1 \in A_1, \omega_2 \in A_2, \ldots, \omega_n \in A_n\}$, где $A_i \in \mathfrak{A}_i$, а вероятности множеств $A \in \mathfrak{A}$ определяются как

$$P(A) = \int_A P(d\omega_1) \int_A P_1(\omega_1, d\omega_2) \ldots \int_A P_{n-1}(\omega_{n-1}, d\omega_n). \qquad (1.4)$$

Пространство Ω вместе с σ-алгеброй подмножеств $\mathfrak{A}$ и вероятностной мерой $P(A)$ называется *цепью Маркова* с n моментами времени, пространствами состояния $(\Omega_i, \mathfrak{A}_i)$, переходными функциями $(P_i(\omega, A)$ и начальным распределением вероятностей $P(A)$.

Мы будем называть σ-алгеброй состояний системы в k-ый момент времени подалгебру $\widetilde{\mathfrak{A}}_k$ алгебры $\mathfrak{A}$, состоящую из множеств вида

$$\widetilde{A}_k = \{\omega_1 \in \Omega_1, \ldots, \omega_{k-1} \in \Omega_{k-1}, \ \omega_k \in A_k, \ \omega_{k+1} \in \Omega_{k+1}, \ldots, \omega_n \in \Omega_n\},$$

где $A_k \in \mathfrak{A}_k$. Мы будем говорить при этом, что множество $\widetilde{A}_k$ соответствует множеству A_k. Действительная функция $X(\omega)$ называется функцией, зависящей от состояния системы в k-ый момент времени, если эта функция измерима относительно σ-алгебры $\mathfrak{A}_k$. Совокупность функций $X_1(\omega)$,

---

* Читатель, интересующийся лишь цепями Маркова с конечным и счетным числом состояний, может перейти прямо к чтению раздела 1.5, приняв в качестве определения коэффициента эргодичности формулу (1.19).

** В другой терминологии — борелевское поле множеств. Мы будем придерживаться в вопросах теории меры терминологии, принятой в книге Халмоша [34].

$X_2(\omega), \ldots, X_n(\omega)$, где $X_k(\omega)$ зависит от состояния системы в k-й момент времени, называется последовательностью случайных величин, связанных в цепь Маркова. Более подробно эта абстрактное определение обсуждается в книге Дуба [14].

Мы будем предполагать обычно, что нам задана последовательность цепей Маркова, причем n-ая цепь является цепью с n моментами времени. В соответствии с этим все определенные в этом пункте объекты будут зависеть от дополнительного индекса n, который мы будем всегда ставить сверху и в скобках (например, $\Omega_i^{(n)}$). Мы будем предполагать далее, что при каждом n нам задана последовательность случайных величин $X_1^{(n)}, \ldots, X_n^{(n)}$, связанных в n-ую цепь Маркова. Положим $S^{(n)} = X_1^{(n)} + \ldots + X_n^{(n)}$. Мы предполагаем во всем исследовании, что все величины $X_i^{(n)}$ имеют конечные математические ожидания $\mathbf{M} X_i^{(n)}$ и дисперсии $\mathbf{D} X_i^{(n)}$. Тогда конечны и математические ожидания $\mathbf{M} S^{(n)}$ и дисперсии $\mathbf{D} S^{(n)}$.

1.4. Обсудим теперь характеристику переходных функций $P_i^{(n)}$, которая является обобщением величины $\alpha^{(n)}$, использовавшейся в предыдущих работах. Пусть задана некоторая переходная вероятностная функция $P(\psi, \overline{R})$ с областью определения $(\Psi, \mathfrak{R}, \overline{\Psi}, \overline{\mathfrak{R}})$. Мы положим

$$\alpha(P) = 1 - \sup |P(\psi, \overline{R}) - P(\varphi, \overline{R})|, \tag{1.5}$$

где верхняя грань берется по всем $\psi \in \Psi$, $\varphi \in \Psi$, $\overline{R} \in \overline{\mathfrak{R}}$. Величину $\alpha(P)$ мы назовем коэффициентом эргодичности переходной функции $P(\psi, \overline{R})$. Е. Б. Дынкин [15] использовал при доказательстве центральной предельной теоремы для однородной цепи Маркова условие, состоящее в том, чтобы коэффициент эргодичности был меньше 1.

Прежде чем исследовать это определение с разных точек зрения, сформулируем нашу основную теорему. Положим для этого $\alpha_i^{(n)} = \alpha(P_i^{(n)})$. Тогда выполняется следующая.

Теорема 1. *Пусть все величины $X_i^{(n)}$ равномерно ограничены $|X_i^{(n)}| \leqslant C < \infty$ и пусть при всех i и n*

$$\mathbf{D} X_i^{(n)} \geqslant c > 0. \tag{1.6}$$

Пусть, кроме того,

$$\alpha^{(n)} = \min_{i=1,\ldots,n-1} \alpha_i^{(n)} \tag{1.7}$$

и при $n \to \infty$

$$\alpha^{(n)} n^{\frac{1}{3}} \to \infty, \tag{1.8}$$

тогда равномерно по t при $n \to \infty$

$$\mathbf{P}\left(\frac{S^{(n)} - \mathbf{M} S^{(n)}}{\sqrt{\mathbf{D} S^{(n)}}} < x\right) \to \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{x} e^{-t^2/2}\, dt, \tag{1.9}$$

т. е. для $S^{(n)}$ выполнена центральная предельная теорема.

Рассмотрим некоторое множество W с заданной на нем σ-алгеброй подмножеств $\mathfrak{A}$. Рассмотрим, далее, линейное пространство $M_W = \{\mu\}$ всех счетно-аддитивных, конечных функций, заданных на σ-алгебре $\mathfrak{A}$. Введем в это пространство норму

$$\|\mu\| = \frac{1}{2}\left(\sup_{A \in \mathfrak{A}} \mu(A) - \inf_{A \in \mathfrak{A}} \mu(A)\right). \tag{1.10}$$

Норма $\|\mu\|$ равна половине полной вариации обобщенной меры μ *. (Определение см. [34], стр. 123).

Для любой вероятностной меры μ норма $\|\mu\| = \frac{1}{2}$. Рассмотрим, далее, подпространство $L_W \subset M_W$ функций $\lambda \in M_W$ таких, что $\lambda(W) = 0$. При $\lambda \in L_W$ для любого $A \in \mathfrak{A}$ имеет место равенство $\lambda(A) = -\lambda(W \setminus A)$. Поэтому $\sup_{A \in \mathfrak{A}} \lambda(A) = -\inf_{A \in \mathfrak{A}} \lambda(A)$ и

$$\|\lambda\| = \sup_{A \in \mathfrak{A}} |\lambda(A)|. \tag{1.10'}$$

Отсюда видно, что если считать $P(\psi, \overline{R})$ при фиксированном ψ элементом $M_{\overline{\Psi}}$, то

$$\alpha(P) = 1 - \sup_{(\psi, \varphi)} \|P(\psi, \overline{R}) - P(\varphi, \overline{R})\|, \tag{1.5'}$$

где $\psi \in \Psi$, $\varphi \in \Psi$.

Определим оператор P, соответствующий функции $P(\psi, \overline{R})$ и переводящий пространство M_Ψ в $M_{\overline{\Psi}}$ как $P_\mu = \tilde{\mu}$, где $\tilde{\mu} \in M_{\overline{\Psi}}$ и

$$\tilde{\mu}(\overline{R}) = \int_\Psi P(d\psi, \overline{R})\, \mu(d\psi), \quad \overline{R} \in \overline{\mathfrak{R}}. \tag{1.11}$$

Оператор P является, очевидно, линейным и непрерывным. Он переводит вероятностные меры в вероятностные меры и его норма равна всегда 1. Общая марковская переходная функция была рассмотрена впервые как оператор в пространстве распределений Колмогоровым [18]. Иосида и Какутани начали [16] систематическое изучение переходных функций как оператора в построенном выше банаховом пространстве.

Оператор P переводит подпространство L_Ψ в подпространство $L_{\overline{\Psi}}$. Положим $N(P)$ равным норме оператора P, рассматриваемого как оператор, действующий лишь на L_Ψ,

$$N(P) = \sup_{\lambda \in L_\Psi} \frac{\|P\lambda\|}{\|\lambda\|}. \tag{1.12}$$

Подпространство L_Ψ совпадает с подпространством, порожденным разностями $\mu_1 - \mu_2$, где μ_1 и μ_2 — вероятностные меры. Поэтому

$$N(P) = \sup_{(\mu_1, \mu_2)} = \frac{\|P\mu_1 - P\mu_2\|}{\|\mu_1 - \mu_2\|}, \tag{1.12'}$$

где $\mu_1 \in M_\Psi$, $\mu_2 \in M_\Psi$. Величина $N(P)$ характеризует степень сближения оператором P вероятностных мер. Если обозначить через δ_x, $x \in \Psi$ вероятностную меру, сосредоточенную в точке x (т. е. $\delta_x(R) = 1$ при $x \in R$ и равно 0 при $x \overline{\in} R$, $R \in \mathfrak{R}$), то $\delta_x \in M_\Psi$. Очевидно, что $P\delta_x = P(x, R)$. Если для некоторого $R \in \mathfrak{R}$ точка $x \in R$, но $y \overline{\in} R$, то $\|\delta_x - \delta_y\| = 1$; если же для всех $R \in \mathfrak{R}$ из $x \in R$ следует, что и $y \in R$, то из измеримости функции $P(\,, \overline{R})$ вытекает, что $P(x, \overline{R}) \equiv P(y, \overline{R})$. Отсюда следует сразу, что $\alpha(P) \geqslant 1 - N(P)$. В следующей части работы мы без труда покажем, что

$$\alpha(P) = 1 - N(P). \tag{1.5''}$$

* Нетрудно показать, что M_W — это банахово пространство (см., например, [7], стр. 351). Мы не будем использовать этот факт.

Всегда $0 \leqslant \alpha(P) \leqslant 1$. Легко видеть, что $\alpha(P) = 1$ тогда и только тогда, когда $P(\psi, \overline{R}) \equiv P(\overline{R})$, т. е. не зависит от $\psi \in \Psi$. Далее, $\alpha(P) = 0$ тогда и только тогда, когда для любого $\varepsilon > 0$ найдутся такие $x \in \Psi$ и $y \in \Psi$, что меры * $P(x, \cdot)$ и $P(y, \cdot)$ сосредоточены на множествах A_x и A_y соответственно таких, что $P(y, A_x A_y) < \varepsilon$ и $P(y, A_x A_y) < \varepsilon$.

Дадим, наконец, еще одну интерпретацию определения коэффициента эргодичности, являющуюся несколько более эффективной, чем предыдущая. Пусть задано множество W с σ-алгеброй его подмножества $\mathfrak{A}$ и пусть заданы меры $\mu_1 \in M_W$, $\mu_2 \in M_W$. Мы будем говорить, что мера $\nu \in M_W$ минорирует меру μ, если при всех $A \in \mathfrak{A}$

$$\mu(A) \geqslant \nu(A). \tag{1.13}$$

Как нетрудно показать (см. раздел 3.2 следующей части работы), если положить

$$\tilde{\alpha}(\mu_1, \mu_2) = \sup \nu(W), \tag{1.14}$$

где верхняя грань берется по всем мерам ν, минорирующим одновременно меры μ_1 и μ_2, то

$$\|\mu_1 - \mu_2\| = 1 - \tilde{\alpha}(\mu_1, \mu_2). \tag{1.15}$$

Как указал А. Н. Колмогоров (доказательство будет приведено в следующей части нашей работы), величину $\tilde{\alpha}(\mu_1, \mu_2)$ можно определить так же как

$$\tilde{\alpha}(\mu_1, \mu_2) = \inf_{\{S_i\}} \sum_{i=1}^{m} \min\left(\mu_1(S_1), \mu_2(S_i)\right), \tag{1.16}$$

где нижняя грань берется по всевозможным разбиениям пространства W на сумму попарно непересекающихся слагаемых S_i, $i = 1, \ldots, m$. Применяя (1.15) к переходным вероятностям $P(\psi, \overline{R})$ при фиксированном ψ и учитывая (1.5′), получаем, что

$$\alpha(P) = \inf_{(\psi, \varphi)} \tilde{\alpha}\left(P(\psi, \cdot),\ P(\varphi, \cdot)\right). \tag{1.5‴}$$

В нашей работе [13] мы использовали вместо $\alpha(P)$ в качестве основной характеристики переходной вероятностной функции величину $\beta(P)$, определяемую как

$$\beta(P) = \sup \nu(\overline{\Psi}), \tag{1.17}$$

где верхняя грань берется по совокупности всех мер $\nu(\overline{R})$, $\overline{R} \in \overline{\mathfrak{R}}$, минорирующих одновременно все меры $P(\psi, \overline{R})$, $\psi \in \Psi$, и сформулировали результаты, в остальном аналогичные некоторым из результатов этой работы. Из (1.14) и (1.5‴) следует, что всегда

$$\beta(P) \leqslant \alpha(P), \tag{1.18}$$

так что результаты настоящей работы включают в себя результаты работы [13]. Грубо говоря, условия, ограничивающие снизу коэффициент $\alpha(P)$, обеспечивают наличие общей части у каждой пары мер $P(\psi, \overline{R})$,

* Под $P(x, \cdot)$ мы понимаем величину $P(x, A)$, рассматриваемую как функцию от A при фиксированном x.

$P(\varphi, \overline{R})$, в то время как условия, ограничивающие снизу величину $\beta(P)$, обеспечивают наличие общей части сразу у всех мер $P(\psi, \overline{R})$, $\psi \in \Psi$. Это замечание становится более ясным в случае счетной цепи (см. раздел 1.5).

Величина $\alpha(P)$ является мерой эргодических свойств переходной функции P. Естественность ее использования подтверждается также в некотором смысле нашей теоремой 11 (стр. 84).

1.5. Рассмотрим случай цепей Маркова со счетным числом состояний $E_1, E_2, \ldots$ Неоднородная цепь Маркова с n моментами времени задается тогда начальным распределением вероятностей $\{p_i\}$ и матрицами P_k вероятностей $\{_{ij}p_k\}$, $i = 1, 2, \ldots$; $j = 1, 2, \ldots$; $k = 1, \ldots, n-1$, перейти из состояний E_i в k-ый момент времени в состояние E_j в $k+1$-ый момент времени. Случайные величины, связанные в эту цепь Маркова, определяются просто как произвольные функции $X_k(E_i)$. Мы будем считать снова, что при каждом n задана последовательность величин, связанных в цепь Маркова с n моментами времени. Объекты, относящиеся к n-ой цепи, будем выделять индексом n сверху.

Для любой стохастической матрицы Q с элементами (q_{ij}) положим коэффициент эргодичности равным

$$\alpha(Q) = \inf_{k,\, l} \sum_{m=1}^{\infty} \min(q_{km}, q_{lm}), \tag{1.19}$$

где нижняя грань берется по всем парам k и l, а минимум берется из двух указанных вероятностей. Нетрудно показать (и это будет сделано в одной из следующих частей нашей работы), что это определение согласуется с определением коэффициента эргодичности $\alpha(Q)$ (данным в разделе 1.5).

Положим

$$\alpha_i^{(n)} = \alpha(P_i^{(n)}). \tag{1.20}$$

Пусть $S^{(n)} = X_1^{(n)} + \ldots X_n^{(n)}$. При таких обозначениях имеет место теорема 1.

В нашей работе [13] мы использовали вместо $\alpha_i^{(n)}$ величины

$$\beta_i^n = \sum_{j=1}^{\infty} \min_k {}_{kj} p_i^n. \tag{1.21}$$

Очевидно, что всегда $\alpha_i^{(n)} \geqslant \beta_i^{(n)}$ и в широком классе случаев $\alpha_i^{(n)} > \beta_i^{(n)}$. Поэтому результаты настоящей работы значительно сильнее результатов заметки [13].

Очевидно, что если при некоторых i и n и для некоторого состояния E_m

$${}_{km} p_i^{(n)} \geqslant \alpha, \tag{1.22}$$

то и $\alpha_i^{(n)} \geqslant \alpha$. Поэтому из нашей теоремы 1 следуют все перечисленные в разделе 1.1. результаты, а также результат Сапогова, упомянутый в разделе 1.2.

1.6. Заменим условие равномерной ограниченности величин $X_i^{(n)}$ условием равномерной ограниченности их дисперсий. Тогда имеет место

Теорема 2. *Пусть дисперсии всех величин $X_i^{(n)}$ равномерно ограничены сверху и снизу, т. е. пусть при некоторых постоянных c и C*

$$0 < c \leqslant \mathbf{D}\, X_i^{(n)} \leqslant C < \infty. \tag{1.23}$$

Пусть, кроме того, выполнены требования (1.7) *и* (1.8); *тогда, если последовательность распределений нормированных сумм*

$$\frac{S^{(n)} - \mathbf{M}\, S^{(n)}}{\sqrt{\mathbf{D}\, S^{(n)}}} \tag{1.24}$$

сходится при $n \to \infty$ к некоторому собственному распределению, то это распределение является безгранично делимым.

Анализ примера С. Н. Бернштейна (см. § 2 следующей части работы) показывает, что получаемое там предельное распределение для последовательности (1.24) не является безгранично делимым, и таким образом условие (1.8) не может быть заменено в теореме 2 более сильным. Оказывается, что «ограничения на рост в бесконечности» величин $X_i^{(n)}$, накладываемые равномерно на все эти величины и более слабые, чем предположения их равномерной ограниченности, не позволяют гарантировать асимптотическую нормальность сумм (1.24), если накладывать на переходные вероятности лишь условие (1.8). Для того чтобы добиться асимптотической нормальности, надо сочетать более слабые ограничения на рост $X_i^{(n)}$ с более сильными ограничениями на убывание $\alpha_i^{(n)}$.

Мы начнем формулировать подобные результаты со следующей теоремы.

Теорема 3. *Пусть для любого $m > 0$ существует константа γ_m такая, что при всех i и n*

$$\mathbf{M} \left| X_i^{(n)} - \mathbf{M}\, X_i^{(n)} \right|^m \leqslant \gamma_m < \infty \tag{1.25}$$

и пусть выполнено условие (1.6). *Если при любом $\varepsilon > 0$*

$$\alpha^{(n)} n^{\frac{1}{3} - \varepsilon} \to \infty, \tag{1.26}$$

то для последовательности сумм $S^{(n)}$ выполнено утверждение об асимптотической нормальности (1.9).

Как известно, условие равномерной ограниченности дисперсий недостаточно для асимптотической нормальности даже в случае независимых слагаемых $X_i^{(n)}$. Для случая, когда все $\alpha_i^{(n)} \geqslant \alpha > 0$, мы сформулируем одно достаточное условие асимптотической нормальности, близкое по структуре к необходимому и достаточному условию, известному для случая независимых слагаемых:

Теорема 4. *Пусть выполнено условие* (1.6) *и при любом $r > 0$*

$$\lim_{n \to \infty} \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} \int_{|t| > r\sqrt{n}} t^2\, dF_i^{(n)}(t) = 0, \tag{1.27}$$

где $F_i^{(n)}(t) = \mathbf{P}\{X_i^{(n)} < t\}$ и пусть, наконец, при всех

$$\alpha^{(n)} \geqslant \alpha > 0. \tag{1.28}$$

Тогда справедливо утверждение об асимптотической нормальности (1.9).

Укажем теперь «с точностью до степенной шкалы роста функций» общую связь между ограничениями, которые надо накладывать на распределение величин $X_i^{(n)}$ и поведение $\alpha^{(n)}$.

Теорема 5. *Пусть задано некоторое число* β, $0<\beta<\frac{1}{3}$ *и пусть выполняются условие* (1.6) *и условие*

$$\alpha^{(n)} n^{\beta} \to \infty. \tag{1.29}$$

Если при

$$m = 2\frac{1-\beta}{1-3\beta} \tag{1.30}$$

равномерно по всем i *и* n *ограничены сверху моменты*

$$\mathbf{M}\,|X_i^{(n)} - \mathbf{M}X_i^{(n)}|^m \leqslant \gamma_m < \infty, \tag{1.31}$$

то выполняется соотношение (1.9).

С другой стороны, можно построить пример последовательности величин, связанных в цепь Маркова, для которой выполнены условия (1.6) и (1.29), при любом $\tilde{m} < m$ и всех i

$$\mathbf{M}\,|X_i^{(n)} - \mathbf{M}X_i^{(n)}|^{\tilde{m}} \leqslant \gamma_{\tilde{m}} < \infty, \tag{1.31'}$$

но последовательность (1.24) имеет предельное распределение, не являющееся нормальным. Очевидно, что теорема 3 является следствием теоремы 5. Некоторый интерес представляет тот случай, когда сами слагаемые $X_i^{(n)}$ имеют нормальное распределение.

Теорема 6. *Пусть все величины* $X_i^{(n)}$ *имеют нормальные распределения, причем для их дисперсий* $d_i^{(n)}$ *имеет место неравенство*

$$0 < c \leqslant d_i^{(n)} \leqslant C < \infty. \tag{1.32}$$

Тогда для выполнения утверждения (1.9) *об асимптотической нормальности сумм* $S^{(n)}$ *достаточно, чтобы*

$$\lim_{n\to\infty} \alpha^{(n)} n^{\frac{1}{3}} (\ln n)^{-\frac{1}{3}} = \infty. \tag{1.33}$$

Обратно, для любого $a < \infty$ *можно привести пример, когда*

$$\lim_{n\to\infty} \alpha^{(n)} n^{\frac{1}{3}} (\ln n)^{-\frac{1}{3}} = a \tag{1.33}$$

и предельное распределение не является нормальным.

Аналогичные результаты можно получить и при других условиях, наложенных на поведение в бесконечности величин $X_i^{(n)}$. Например, если все величины $X_i^{(n)}$ имеют показательное распределение, то роль «пограничной функции» играет функция $(\ln n)^{-\frac{2}{3}} n^{\frac{1}{3}}$ и т. д.

Рассмотрим теперь случай, когда $|X_i^{(n)}| \leqslant C^{(n)}$, но сами постоянные $C^{(n)}$, быть может, неограничены при $n \to \infty$.

Теорема 7. *Пусть выполнено условие* (1.23) *и пусть при всех* i *и* n *с вероятностью* 1

$$|X_i^{(n)}| \leqslant C^{(n)}. \tag{1.34}$$

Тогда для выполнения (1.9) *достаточно, чтобы при* $n \to \infty$

$$C^{(n)} (\alpha^{(n)})^{-\frac{3}{2}} n^{-\frac{1}{2}} \to 0. \tag{1.35}$$

Обратно, если для некоторых последовательностей постоянных $C^{(n)}$ *и коэффициентов эргодичности* $\alpha^{(n)}$

$$\lim_{n \to \infty} C^{(n)} (\alpha^{(n)})^{-\frac{3}{2}} n^{-\frac{1}{2}} = a > 0, \tag{1.35'}$$

то можно построить пример, в котором предельное распределение не является нормальным.

Сформулируем, наконец, один общий критерий нормальности, из которого, как мы покажем в параграфе 8 следующей части работы, без труда следуют достаточные условия нормальности, содержащиеся в теоремах 3—7. Так как эти достаточные условия являются, каждое в своем частном случае, оптимальными, то естественно считать, что этот общий критерий является в некотором смысле оптимальным.

Теорема 8. *Пусть выполнены условия* (1.23). *Положим*

$$F_i^{(n)}(t) = \mathbf{P}\{X_i^{(n)} - \mathbf{M} X_i^{(n)} < t\}.$$

Тогда для выполнения утверждения об асимптотической нормальности (1.9) *достаточно, чтобы при любом* $r > 0$

$$\lim_{n \to \infty} \frac{1}{n (\alpha^{(n)})^2} \sum_{i=1}^{n} \int\limits_{|t| \geqslant r n^{\frac{1}{2}} (\alpha^{(n)})^{\frac{3}{2}}} t^2 \, dF^{(n)}(t) = 0. \tag{1.36}$$

В условиях нашей основной теоремы 1 кажется несколько стеснительным определение (1.7), предполагающее равномерное по i необращение в нуль величин $\alpha_i^{(n)}$. Казалось бы, для того чтобы обеспечить «достаточную эргодичность» цепи, а значит, и асимптотическую нормальность суммы связанных в цепь величин, нужно лишь предположить необращение в нуль достаточно большого числа величин $\alpha_i^{(n)}$. В одной из следующих частей нашей работы мы приведем пример, заставляющий относиться к подобным заключениям с большой осторожностью. А именно, в этом примере при всех четных i коэффициенты эргодичности $\alpha_i^{(n)} \geqslant \alpha > 0$ равномерно по i и n, но в то же время предельное распределение ненормально. Можно, однако, доказать следующее обобщение теоремы 1:

Теорема 9. *Пусть все величины* $X_i^{(n)}$ *равномерно ограничены* $|X_i^{(n)}| \leqslant C < \infty$ *и пусть имеет место* (1.6). *Пусть далее*

$$\lim_{n \to \infty} n^{-\frac{2}{3}} \sum_{i=1}^{n-2} \min(\alpha_i^{(n)}, \alpha_{i+1}^{(n)}) = \infty \tag{1.37}$$

и для всех пар k *и* l *таких, что* $k - l \geqslant n^{\frac{1}{3}}$ *и некоторой функции* $d(n) \to \infty$ *при* $n \to \infty$

$$\sum_{i=l}^{k} \alpha_i^{(n)} \geqslant d(n). \tag{1.38}$$

Тогда выполнено утверждение (1.9).

Интересно также несколько ослабить условие (1.6), заменив его предположением о необращении в нуль достаточного числа дисперсий $\mathbf{D}X_i^{(n)}$.

Теорема 10. *Теорема 1 верна, если заменить* (1.6) *и* (1.8) *на условие: при* $n \to \infty$

$$n^{-\frac{2}{3}} \alpha^{(n)} \Big(\sum_{i=1}^{n} \mathbf{D} X_i^{(n)} \Big) \to \infty. \tag{1.39}$$

Можно было бы сформулировать результаты, комбинирующие в одно целое обобщения теоремы 1 в различных направлениях, даваемые теоремами 2—10. Однако ввиду и без того большого объема работы мы воздержимся от таких обобщений.

1.7. Н. А. Сапогов [28], [29] указал простой прием, позволяющий получать из обычных предельных теорем аналогичные многомерные предельные теоремы. Так, если предположить в условиях нашей теоремы 1, что $X_i^{(n)}$ — это h-мерные векторы (определение векторных величин, связанных в цепь, дается в очевидной аналогии со скалярным случаем; под $|X_i^{(n)}|$ понимается тогда длина вектора), и заменить условие (1.6) условием

$$\mathbf{D}(X_i^{(n)}, U) \geqslant c > 0 \tag{1.40}$$

для любого h-мерного вектора U с $|U| = 1$ (под $(X_i^{(n)}, U)$ здесь понимается скалярное произведение), то последовательность векторов $S^{(n)}$ будет асимптотически нормальной. Аналогичные обобщения допускают и остальные теоремы 2—10.

1.8. Особого рассмотрения заслуживает случай одной бесконечной последовательности величин, связанных в цепь Маркова. На нашем языке схемы серий это означает, что переходные функции $P_i(\omega, A)$ и их области определения не зависят от n и что величины $X_i^{(n)}$ также не зависят от n. Положим в этом случае $\alpha_i^{(n)} = \alpha_i$. Широкорад [35] рассмотрел последовательность величин, связанных в цепь Маркова с двумя состояниями, и доказал в одном частном случае асимптотическую нормальность их суммы при условии $\alpha_i i^{1-\varepsilon} \to \infty$. $\varepsilon > 0$. В связи с этим А. Н. Колмогоров поставил вопрос о том, нельзя ли для схемы последовательности величин, связанных в цепь, заменить условие Бернштейна $\alpha_i i^{\frac{1}{3}} \to \infty$ более сильным условием $\alpha_i i \to \infty$. Пример Бернштейна относится к более общей схеме серий. В § 10, обобщая построения Бернштейна, мы покажем, что для схемы серий при $\alpha_i \sim c i^{-\frac{1}{3}}$, вообще говоря, уже не выполняется центральная предельная теорема. Успех Широкорада был вызван лишь особо гладким в разобранном им частном случае поведением вероятностей перехода *.

* Мы не привели в нашем обзоре предыдущих результатов стоящие несколько особняком работы Деблина [10], [11] (см. также [25]). В этих работах центральная предельная теорема для конечной неоднородной цепи доказана в случае, когда все матрицы вероятностей перехода в некотором смысле однотипны и их положительные элементы не стремятся к нулю. Этот результат не поглощается прямо нашей теоремой 1, так как в условиях работы Деблина коэффициенты эргодичности могут равняться нулю. (Впрочем, косвенным образом результат Деблина может быть выведен из указанной теоремы). *Продолжение см. на стр. 84.*

1.9. Мы сформулируем, наконец, один достаточный критерий эргодичности неоднородной цепи Маркова, являющийся в некотором смысле оптимальным. Мы включаем этот результат в нашу работу, так как он подтверждает естественность использования в теории цепей Маркова введенного в этой работе коэффициента эргодичности $\alpha(P)$.

Мы будем считать для простоты, что пространство состояний Ω и σ-алгебра измеримых множеств $\mathfrak{A}$ общие для всех моментов времени. Цепь Маркова задается последовательностью переходных функций $P_i(\omega, A)$, $i = 1, 2, \ldots$. Через эти переходные функции выражаются вероятности $P_{k,l}(\omega, A)$ перейти из состояния ω в момент k в множество состояний A в момент l. В соответствии с А. Н. Колмогоровым [7] мы будем говорить, что цепь Маркова является эргодической, если при любом k, любых $\omega_1 \in \Omega$, $\omega_2 \in \Omega$ равномерно по $A \in \mathfrak{A}$

$$\lim_{n\to\infty} |P_{k,n}(\omega_1, A) - P_{k,n}(\omega_2, A)| = 0. \tag{1.41}$$

Мы будем говорить, что последовательность переходных функций $\tilde{P}_i$ включает в себя последовательность P_i, если для некоторых $i_1, i_2, \ldots, i_n, \ldots$ $\ldots (i_k \neq i_j$ при $k \neq j)$ $\tilde{P}_{i_k}$ совпадает с P_k. Мы будем говорить, что последовательность P_i является сильно эргодической, если для любой последовательности $\tilde{P}_i$, включающей в себя последовательность P_i, соответствующая цепь Маркова является эргодической. Мы будем обозначать через α_i коэффициент эргодичности $\alpha(P_i)$.

Теорема 11. *Для того чтобы последовательность P_i была сильно эргодической, необходимо и достаточно, чтобы*

$$\sum_{i=1}^{\infty} \alpha_i = \infty. \tag{1.42}$$

В частности, условие (1.42) является достаточным для того, чтобы цепь, заданная переходными функциями P_i, была эргодической. Несмотря на свою простоту, это достаточное условие эргодичности не отмечалось в литературе даже для случая конечной цепи. Почти все известные нам достаточные критерии эргодичности для неоднородных цепей [17], [6] стр. 206, [7] стр. 362, [33] являются также достаточными условиями сильной эргодичности и поэтому входят как частный случай в (1.42). Исключение составляют лишь недавние, очень интересные результаты Т. А. Сарымсакова [27].

В связи с этим возникает гипотеза о том, что центральная предельная теорема верна и в более общей обстановке, если, с одной стороны, предположить какого-то рода однотипность переходных вероятностей, а с другой — отказаться от условия необращения в нуль коэффициентов эргодичности. Возможно также, что в таком «почти однородном» случае удастся допустить стремление к нулю соответствующим образом подобранных характеристик вероятностей перехода не со скоростью $n^{-\frac{1}{3}}$, а со скоростью n^{-1}. Подобный результат включал бы в себя приведенный результат Широкорада, а также результаты для схемы серий однородных цепей (см. [12]).

1.10. Введем одно обозначение, которое мы будем использовать во всем дальнейшем, а именно: положим при $1 < k < l \leqslant n$

$$S_{k,\,l}^{(n)} = X_{k+1}^{(n)} + \ldots + X_l^{(n)}, \tag{1.43}$$

$$S_{1,\,l}^{(n)} = X_1^{(n)} + \ldots + X_l^{(n)}. \tag{1.43'}$$

1.11*. Опишем очень конспективно основные методы доказательств теорем 1 и 2. Мы будем считать сразу $\mathbf{M}X_l^{(n)} = 0$. Нетрудно показать, что $1 - \alpha(P_{kl}^{(n)}) \leqslant \prod_{i=k}^{l-1} (1 - \alpha_i^{(n)})$. Отсюда вытекает, что если, как это предполагается в теоремах 1 и 2, $\alpha_i^{(n)}\, n^{\frac{1}{3}} \to \infty$, то для любого $\varepsilon < 1$ при достаточно большом n для всех отрезков (i, k) с $k - i \geqslant n^{\frac{1}{3}}$ коэффициент эргодичности $\alpha(P_{k,\,l}^{(n)}) \geqslant \varepsilon$. Но если $\alpha(P_{k,\,l}^{(n)}) \geqslant \varepsilon$, то, как нетрудно показать, величины $S_{1,\,k}^{(n)}$ и $S_{l,\,n}^{(n)}$ станут независимыми, если изменить их на множестве вероятности $1 - \varepsilon$. Отсюда следует, что если при каждом n можно выбрать k_n отрезков вида $(i,\ i + [n^{\frac{1}{3}} + 1])$ так, что $k_n \to \infty$ и что суммой $\sum_{i=1}^{k_n} S_{i,\ i+[n^{\frac{1}{3}}]+1}^{(n)}$ можно асимптотически пренебречь по сравнению с $S^{(n)}$, то асимптотическое поведение $S^{(n)}$ будет совпадать с поведением суммы независимых случайных величин и, следовательно, будет безгранично делимым. (Дополнительная трудность состоит в том, чтобы выбрать «выбрасываемые» отрезки длины $[n^{\frac{1}{3}} + 1]$ так, чтобы оставшиеся слагаемые оказались бесконечно малыми). Подобное сведение к суммам независимых случайных величин применял для общих последовательностей слабо зависимых величин Бернштейн [2] и для однородных цепей Маркова Деблин (см. [9], а также [12]).

Покажем, что $\mathbf{D}S^{(n)}\, n^{-\frac{2}{3}} \to \infty$. Очевидно, что $\mathbf{D}S_{i,\ i+[n^{\frac{1}{3}}]+1}^{(n)} \leqslant C^2 (n+1)^{\frac{2}{3}}$. Отсюда и следует возможность пренебречь асимптотически величиной $\sigma_n S_{i,\ i+[n^{\frac{1}{3}}]+1}^{(n)}$, а значит и совокупностью k_n таких величин, если $k_n \to \infty$ достаточно медленно. (Здесь $\sigma_n = (\mathbf{D}S^{(n)})^{-\frac{1}{2}}$ нормирующий множитель). Основная трудность в получении приведенной оценки снизу для $\mathbf{D}S^{(n)}$ состоит в том, что дисперсия $\mathbf{D}S_{1,\,m}^{(n)}$ изменяется при возрастании m немонотонно. В нашем случае оказывается недостаточным метод получения этой оценки, принадлежащий Бернштейну и использованный в предыдущих работах. Пусть $\bar{D}_m^n$ — математическое ожидание условной дисперсии величины $S_{1,\,m}^{(n)}$ при условии, что фиксировано состояние системы в m-ый момент времени. Легко видеть, что всегда $\mathbf{D}S_{1m}^{(n)} - \bar{D}_m^{(n)} = \tilde{D}_m^{(n)} \geqslant 0$. Мы покажем, что $\bar{D}_{m+1}^{(n)} - \bar{D}_m^{(n)} \geqslant \frac{1}{100} \tilde{D}_m^{(n)}\, \alpha_m^{(n)}$ (т. е., что $\bar{D}_m^{(n)}$ возрастает монотонно) и что $\min(\tilde{D}_m^{(n)},\ \tilde{D}_{m+1}^{(n)}) \geqslant \frac{1}{10} \mathbf{D}X_m^{(n)}$. Отсюда следует нужная оценка.

Наиболее трудная часть задачи состоит в том, чтобы проверить, что сумма независимых величин, к которой сведено изучение $S^{(n)}$, удовлетво-

* Этот раздел может быть опущен читателем без прямого ущерба для понимания дальнейшего его материала.

ряет условиям асимптотической нормальности (см. [8] стр. 110). Воспользуемся леммой, легко вытекающей из этих условий и доказываемой в § 6.

Лемма. *Пусть* $\mu_1^{(n)}, \ldots, \mu_{r_m}^{(n)}$ *являются при фиксированном* n *независимыми случайными величинами, причем* $\gamma^{(n)} = \mu_1^{(n)} + \ldots + \mu_{r_n}^{(n)}$ *и дисперсия* $\mathbf{D}\gamma^{(n)} = 1$. *Пусть при* $n \to \infty$ *равномерно по* k *дисперсии* $\mathbf{D}\mu_k^{(n)} \to 0$. *Пусть, наконец,* $\mu_k^{(n)} = \nu_k^{(n)} = \tilde{\nu}_k^{(n)}$, *где при* $n \to \infty$ *равномерно по* k $\mathbf{D}\nu_k^{(n)} \to 0$ *и* $\mathbf{D}\tilde{\nu}_k^{(n)} \to 0$, *где при некотором* $C < \infty$ *и всех* n $\sum_{k=1}^{r_n} (\mathbf{D}\nu_k^{(n)} + \mathbf{D}\tilde{\nu}_k^{(n)}) \leqslant C$, *и где величина* $\nu_\alpha^{(n)}$ *не зависит от величин* $\nu_\beta^{(n)}$, $\tilde{\nu}_\beta^{(n)}$ *при* $\beta \neq \alpha$. *Пусть суммы* $\nu_1^{(n)} + \ldots + \nu_{r_n}^{(n)}$ *и* $\tilde{\nu}_1^{(n)} + \ldots + \tilde{\nu}_{r_n}^{(n)}$ *являются асимптотически нормальными при* $n \to \infty$, *тогда и величина* $\gamma^{(n)}$ *является асимптотически нормальной.*

Каждое из независимых слагаемых, к сумме которых сводится изучение $S^{(n)}$, имеет то же распределение, что и случайная величина $\sigma_n S_{k,l}^{(n)}$ при некоторых k и l. В соответствии с леммой мы можем, разбив подходящим образом каждую из величин $\sigma_n S_{k,l}^{(n)}$ на сумму двух слагаемых ν и $\tilde{\nu}$, доказывать отдельно асимптотическую нормальность сумм слагаемых ν и сумм слагаемых $\tilde{\nu}$. Идея этого разбиения может быть описана следующим образом. Разобьем отрезок $[k, l]$ на сумму прилегающих друг к другу отрезков, каждый из которых, кроме последнего, имеет длину $[n^{\frac{1}{3}} + 1]$, и занумеруем эти отрезки в естественном порядке. Обозначим это разбиение через R. Положим ν равным произведению нормирующего множителя σ_n на сумму величин $X_i^{(n)}$ по всем i, принадлежащим отрезкам нашего разбиения R с четными номерами, а $\tilde{\nu}$ —аналогичному произведению для отрезков с нечетными номерами. Смысл такого представления состоит в том, что слагаемое ν оказывается само суммой бесконечно малых и почти независимых случайных величин ζ, являющихся суммами $X_i^{(n)}$ по отдельным отрезкам разбиения R. Действительно, два соседних слагаемых ζ отделены отрезками длины $[n^{\frac{1}{3}}+1]$, а как указывалось, коэффициент эргодичности для вероятностей перехода за такой отрезок времени стремится к 1 при $n \to \infty$. В условиях теоремы 1 слагаемые ограничены бесконечно малыми константами, так как они являются суммой $[n^{\frac{1}{3}} + 1]$ равномерно ограниченных величин $X_i^{(n)}$, а нормирующий множитель σ_n таков, что $\sigma_n n^{\frac{1}{3}} \to 0$. Дополнительная трудность состоит в том, чтобы добиться выполнения входящего в лемму условия равномерной ограниченности сумм дисперсий. Для этого приходится усложнить намеченное только что построение (см. § 6). Однако для простоты мы не будем учитывать здесь этих осложнений.

Предположим теперь, что $\alpha^{(n)} n^{\frac{1}{3}} \to \infty$, где $\varepsilon > 0$. Легкий расчет показывает, что тогда для любого отрезка $[k, l]$ длины $[n^{\frac{1}{3}} + 1]$ коэффициент эргодичности $\alpha_{kl}^{(n)}$ при достаточно большом n больше числа $1 - n^{-\frac{\varepsilon}{2}}$. Так как число слагаемых растет лишь степенным образом, а «эргодичность» растет показательным образом, можно пренебречь полностью зависимостью слагаемых, образующих сумму ν, между собой. Изучение $\Sigma\nu$ сведется к

изучению $\Sigma\zeta$, где все величины ζ независимы и равномерно ограничены бесконечно малой константой, откуда и следует асимптотическая нормальность $\Sigma\zeta$. Более точный расчет показывает, что проведенное рассуждение проходит при $\alpha^{(n)} n^{\frac{1}{3}} (\ln n)^{-1} \to \infty$.

Доказательство асимптотической нормальности $\Sigma\nu$ при оптимальном условии $\alpha^{(n)} n^{\frac{1}{3}} \to \infty$ требует более громоздких построений. Мы приведем далее доказательство, основанное на том, что сумма представляется в виде неограниченного числа слагаемых, каждое из которых является мартингалом, и к этим последним слагаемым применяются оценки, полученные Леви [22] при доказательстве центральной предельной теоремы для величин, связанных в мартингал.

Настоящая работа представляет собой кандидатскую диссертацию, выполненную под руководством Андрея Николаевича Колмогорова. Автор выражает Андрею Николаевичу свою большую признательность за важные указания при ее выполнении. Автор благодарит также за интерес к этой работе и ценные советы Е. Б. Дынкина, Ю. В. Линника, Н. А. Сапогова, Б. В. Гнеденко, Ю. В. Прохорова, А. В. Скорохода.

Поступила в редакцию
20. 12. 55

ЛИТЕРАТУРА

[1] С. Н. Бернштейн, Sur le théorème limite du calcul des probabilités, Math. Ann., 85 (1922), 237—241.
[2] С. Н. Бернштейн, Sur l'extension du théorème limite du calcul des probabilités aux sommes de quantités dépendantes, Math. Ann., 97 (1926), 1—59 (Русск. перевод, С. Н. Бернштейн, Распространение предельной теоремы теории вероятностей на сумму зависимых величин, Успехи матем. наук, **10** (1944), 65—144.)
[3] С. Н. Бернштейн, Sur les sommes de quantités dépendantes, Изв. АН СССР, VI сер., № 15—17 (1926), 1459—1478.
[4] С. Н. Бернштейн, Sur les sommes de quantités dépendantes, ДАН СССР, А, № 4 (1928), 55—60.
[5] С. Н. Бернштейн, Détermination d'une limite intérieure de la dispersion des sommes de grandeurs liées en chaine singulière, Матем. сб. 1, № 1, (1936), 29—38.
[6] С. Н. Бернштейн, Курс теории вероятностей, изд. 4-е, М.—Л., Гостехиздат, 1946.
[7] Г. Биркгоф, Теория структур, ГИИЛ, М., 1952.
[8] Б. В. Гнеденко, Колмогоров А. Н., Предельные распределения для сумм независимых случайных величин, Гостехиздат, М.— Л., 1949.
[9] W. Doeblin. Sur les propriétés asymptotiques de mouvement regis par certains types des chaines simples, Bull. Math. Soc. Rom. Sci., **39**, № 1 (1937), 57—115, **№ 2, 3—61.**
[10] W. Doeblin, Sur les chaines de Markoff, Comp. Rend. Paris, **203** (1936), 1210—1211.
[11] W. Doeblin, Le cas discontinu des probabilités en chaine, Publ. Fac. Sci., Univ. Masaryk, **236** (1937), 3—13.
[12] Р. Л. Добрушин, Предельные теоремы для цепи Маркова из двух состояний, Изв. АН СССР, сер. матем., **17**, № 4 (1953), 291—330.
[13] Р. Л. Добрушин, Центральная предельная теорема для неоднородных цепей Маркова, ДАН СССР, **102**, № 1 (1955), 5—8.
[14] J. L. Doob, Stochastic processes, 1953. John Wiley & Sons, Inc. New. York, Chapman & Hall Ltd, London.
[15] Е. Б. Дынкин, О некоторых предельных теоремах для цепей Маркова, Украин. мат. журн., **6**, № 1 (1954), 21—27.

[16] Yosida Kosaku, Kakutany Shizuo, Application of mean ergidic theorem to the Problem of Markoff's process, Proc. Imp. Acad. Tokyo, 14 (1938), No 9, 333—339.
[17] А. Н. Колмогоров, Об аналитических методах в теории вероятностей, Успехи матем. наук, 5 (1938), 5—41.
[18] А. Н. Колмогоров, О некоторых современных течениях в теории вероятностей. Труды второго всесоюзного математического съезда, Ленинград, 24—30 июня 1934 г., том 1, Пленарные заседания и обзорные доклады, Изд. АН СССР, Л.— М., 1935, 349—358.
[19] А. Н. Колмогоров, Основные понятия теории вероятностей, ОНТИ, М.—Л., 1936.
[20] Г. Крамер, Случайные величины и распределения вероятностей, ГИИЛ, М., 1947.
[21] Г. Крамер, Математические методы статистики, ГИИЛ, М., 1948.
[22] P. Levy, Théorie de l'addition des variables aléatoires, Paris, 1937.
[23] Ю. В. Линник, О неоднородных цепях Маркова, ДАН СССР, 60, № 1 (1948), 21—24.
[24] Ю. В. Линник, К теории неоднородных цепей Маркова, Изв. АН СССР, сер. матем., 13, № 1 (1949), 65—94.
[25] Ю. В. Линник, Н. А. Сапогов, Многомерные интегральный и локальный законы для неоднородных цепей Маркова, Изв. АН СССР, сер. матем., 13, № 6 (1949), 533—566.
[26] А. А. Марков, Исследование общего случая испытаний, связанных в цепь, Записки Академии наук по физ.-матем. отделению, 1910, VIII серия, 25, № 3; Марков А. А., Избранные труды, 1951, Изд. АН СССР, 465—509.
[27] В. И. Романовский, Дискретные цепи Маркова, Гостехиздат, М.—Л., 1949.
[28] Т. А. Сарымсаков, Об эргодическом принципе для неоднородных цепей Маркова, ДАН СССР, 90, № 1 (1953), 25—28.
[29] Н. А. Сапогов, О сингулярных цепях Маркова, ДАН СССР, 58, № 2 (1947), 193—196.
[30] Н. А. Сапогов, Предельная теорема Лапласа —Ляпунова для сингулярной цепи Маркова. ДАН СССР, 58, № 9 (1947), 1905—1908.
[31] Н. А. Сапогов, Об одной предельной теореме, ДАН СССР, 69, № 1 (1959), 15—18.
[32] Н. А. Сапогов, О многомерных неоднородных цепях Маркова, ДАН СССР, 69, № 2 (1949), 137—139.
[33] С. Х. Сираждинов, Эргодический принцип для неоднородных цепей Маркова, ДАН СССР, 71, № 5 (1950), 829—830.
[34] П. Халмош, Теория меры, ГИИЛ, М., 1953.
[35] Б. В. Широкорад, К вопросу о применимости центральной предельной теоремы к цепям Маркова, Изв. АН СССР, сер. матем., 18, № 1 (1954), 95—104.

CENTRAL LIMIT THEOREM FOR NON-STATIONARY MARKOV CHAINS

R. DOBRUSHIN (MOSCOW)

(Summary)

This paper is a continuation of investigations on the central limit theorem for non-stationary Markov chains, carried out by Markov (1910), Bernstein (1922—1936), Sapogov (1947—1949) and Linnik (1948—1949).

Let Ω_i, $i = 1, 2$ be sets of states of the chain, and $\mathfrak{A}_i$ be σ-algebraes of measurable subsets of these sets. A function $\mathbf{P}(x, B)$ $(x \in \Omega_1, B \in \mathfrak{A}_2)$ is called a stochastic transition function if it has the following properties:

1) if $\mathbf{P}(x, B)$ for fixed B is a measurable function of x;

2) if $\mathbf{P}(x, B)$ for fixed x is a probability measure in B. Let Λ_i, $i = 1, 2$ be Banach

spaces of completely additive function of sets $\lambda(B_i)$ $(B_i \in \mathfrak{A}_i)$ with $\lambda(\Omega_i) = 0$ and with norm

$$\|\lambda\| = \sup_{B \in \mathfrak{A}_i} |\lambda(B)|.$$

By means of equation

$$\mathbf{P}\lambda(B) = \int_{\Omega_1} \mathbf{P}(x, B)\,\lambda(dx), \quad B \in \Omega_2$$

any stochastic transition function determines the operator $\mathbf{P}$ taking Λ_1 into Λ_2. Let $N(\mathbf{P})$ be a norm of this operator $\mathbf{P}$.

The number $\alpha(\mathbf{P}) = 1 - N(\mathbf{P})$ is called an ergodic coefficient of this stochastic transition function. If we have a denumerable chain, then $\mathbf{P}$ is a stochastic matrix (p_{ij}) and

$$\alpha(\mathbf{P}) = \inf_{k,\,l} \sum_{m=1}^{\infty} \min(p_{km}, p_{lm}).$$

A non-stationary chain with n moment of times is determined by a sequence of the pair $(\Omega_i^{(n)}, \mathfrak{B}_i^{(n)})$, $i = 1, \ldots, n$, transition functions $\mathbf{P}_i^{(n)}(x, B)$, $(x \in \Omega_i^{(n)}, \quad B \in \Omega_{i+1}^{(n)}$, $i = 1, \ldots, n-1)$, and the initial probability distribution $\mathbf{P}^{(n)}(B)$ $(B \in \mathfrak{A}_1)$. In a natural manner the probability measure is given in the space $\Omega^{(n)} = \Omega_1^{(n)} \times \ldots \times \Omega_n^{(n)}$. Let $X_i^{(n)}$ be a measurable function determined on $\Omega_i^{(n)}$ and continued on $\Omega^{(n)}$, and

$$S^{(n)} = X_1^{(n)} + X_2^{(n)} + \ldots X_n^{(n)}.$$

We shall consider the limit distribution for a sequence of random variables

$$\overline{S}^{(n)} = \frac{S^{(n)} - \mathbf{E}S^{(n)}}{\sqrt{\mathbf{D}S^{(n)}}}.$$

By definition

$$\alpha^{(n)} = \min_i \alpha(\mathbf{P}_i^{(n)}).$$

Theorem 1: *If*

1) $\mathbf{D}X_i^{(n)} > c > 0$

2) $|X_i^{(n)}| < C < \infty$

3) $n^{1/3} \min_i \alpha(\mathbf{P}_i^{(n)}) \to \infty \quad (n \to \infty)$,

then $\overline{S}^{(n)}$ *is an asymptotically normal sequence of random variables.*

If we shall replace condition (2) *by*

(2′) $\mathbf{D}X_i^{(n)} < C < \infty$,

then the limit distribution for $\overline{S}^{(n)}$ *will become an infinitely divisible distribution if it will exist.*

This theorem will be not true if we shall replace condition (3) by

(3′) $n^{1/3} \min_i \alpha(\mathbf{P}_i^{(n)}) \to k > 0 \quad (n \to \infty)$

Theorem 8: *If conditions* (1), (2′) *and* (3) *are satisfied.*

$$F_i^{(n)}(t) = \mathbf{P}\{X_i^{(n)} - \mathbf{E}X_i^{(n)} < t\}$$

and

$$(4) \quad \lim_{n \to \infty} \frac{1}{n(\alpha^{(n)})^2} \sum_{i=1}^{n} \int_{|t| \geqslant \tau n^{1/3}(\alpha^{(n)})^{-2/3}} t^2 dF_i^{(n)}(t) = 0,$$

then $\overline{S}^{(n)}$ *is an asymptotically normal sequence of random variables.*

If we shall replace condition (4) *by a less stringent condition then theorem* 8 *will be not true.*

In the paper a criterion of ergodic properties of non-stationary Markov chains is also given.

ТЕОРИЯ ВЕРОЯТНОСТЕЙ
Том I И ЕЕ ПРИМЕНЕНИЯ Выпуск 1
1956

ON THE SEQUENCE OF EVENTS, SELECTED BY A COUNTER FROM A RECURRENT PROCESS OF EVENTS

By LAJOS TAKACS

Introduction

An important problem in the theory of counters is the study of the sequence of events, which are selected by a counter from a stochastic process of random events. Consider the process of events consisting in the arrivals of particles to a counter. This sequence of events will be generally «rarefied» by the counter and by the other stages of the counting procedure. The sequence of the registered events is obtained by successive selections from the primary sequence of events. The main problem is to establish the law of distribution in time of the registered events, if the laws of the primary sequence of events and the rules of selection are known. This is important in order to make conclusions regarding the unknown law of the underlying sequence of events on the basis of the observed sequence of the registered events.

In the literature generally only the case of a single selection is discussed and it is supposed, that the underlying primary sequence of events is a Poisson process and the selection is made according to model I or model II described below, of a counter with constant impulse time or dead time. In the mentioned case the problem was treated by G. E. Albert and L. Nelson [1] by using a more general model of a counter, which contains both of the mentioned models as special cases.

In what follows we suppose more generally, that the underlying sequence of events is a recurrent process and the selection is made according to the model I or model II of counters, but the impulse time is random variable. We consider also the generalized selection rule introduced by G. E. Albert and L. Nelson [1], but only in the case, when the impulse time is constant.

We shall prove that the sequence of selected events is also a recurrent sequence of events and thus the problem of the successive selections may be reduced to the problem of a single selection.

Thus we shall deal with the following problem: Let us be given a recurrent sequence of events $\{t_n\}$ which by a general selection rule is reduced to a subsequence $\{t'_m\}$. The problem is to determine the probability laws governing the sequence $\{t'_n\}$ if the corresponding law for the sequence $\{t_n\}$ is known.

§ 1. The rule of selection

Consider a primary sequence of events $\{t_n\}$ $(n = 0, 1, 2, \ldots)$ where $t_0 = 0$ and the time differences $t_n - t_{n-1}$ $(n = 0, 1, 2, 3, \ldots)$ are equidistributed, independent positive random variables, having the distribution function $F(x)$. Such a sequence $\{t_n\}$ will be called in the following briefly a *sequence of recurrent events.*

Let us suppose that

$$\mu = \int_0^\infty x dF(x)$$

and

$$\sigma^2 = \int_0^\infty (x - \mu)^2 dF(x)$$

exist.

We suppose that the sequence of selected events $\{t'_n\}$ is obtained by the following rule of selection (G. E. Albert and L. Nelson [1]):

The general model of a random selection. Let us put $t'_0 = t_0$ and suppose that at the time instant t_0 an impulse starts which has the duration χ_0. The event at time t_n $(n \geqslant 1)$ starts an impulse with probability p, if at time t_n an impulse is in course, and with probability 1, if at time t_n there is no impulse in course. Let us denote the durations of the successive impulses by the random variables $\chi_0, \chi_1, \ldots, \chi_n, \ldots$. We suppose that the positive random variables χ_n are independent and equidistributed, having the distribution function $H(x)$ and let us suppose that

$$\alpha = \int_0^\infty x dH(x)$$

exists. The sequence $\{t'_n\}$ consists of those time instants $\{t_n\}$, which represent such moments when a primary event is occuring and no impulse is in course.

If we consider the secondary process $\{t'_n\}$ we see that this is also a recurrent sequence of events, namely $t'_0 = 0$ and the time differences $t'_n - t'_{n-1}$ $(n = 1, 2, 3, \ldots)$ are equidistributed, independent, positive random variables. As a matter of fact, the time instants t'_n are the regeneration points of the process. Denote by $G(x)$ the unknown distribution function of the random variables $t'_n - t'_{n-1}$ $(n = 1, 2, 3, \ldots)$ and put

$$M = \int_0^\infty x dG(x),$$

$$S^2 = \int_0^\infty (x - M)^2 dG(x).$$

Finally denote by $P(t)$ the probability that at the moment t there is no impulse in course.

Remark: We obtain the model I mentioned above if in the general model $p = 0$ and the model II mentioned above if in the general model

$p = 1$. The model I may be used for Geiger — Müller counters and mechanical recorders, the model II for electronmultiplier, crystal counters and electronic amplifiers.

§ 2. Formulation of the problem

Let us denote by ν_t the number of events $\{t'_n\}$ occuring in the time interval $[0, t]$. We shall determine the probabilities $\mathbf{P}\{\nu_t \leqslant n\}$, $\mathbf{P}\{\nu_{T+t} - \nu_T \leqslant n\}$ and the limit $\lim_{T\to\infty} \mathbf{P}\{\nu_{T+t} - \nu_T \leqslant n\}$. If this latter limit exists, we call it the stationary distribution of ν_t in the strict sense. We consider further the probability $\mathbf{P}\{\nu_{\tau+t} - \nu_\tau \leqslant n\}$, where τ is a random variable which has an uniform distribution in the time interval $(0, T)$. We call the limit of this probability for $T \to \infty$ the stationary distribution of ν_t in the weak sense. We determine also $P(t)$ and consider the existence of $\lim_{t\to\infty} P(t) = P$.

Several papers deal with the problems scetched above in special cases. The density of the selected events is determined in the case when the underlying process is a Poisson-process, by L. I. Schiff [20] and A. F. Ruark and F. E. Brammer [19]. The model I for the same case and for constant impulse time is discussed by B. V. Gnedenko [9], I. D. Kurbatov and H. B. Mann [3], I. Giltay [8], Res Jost [11], W. Feller [7] and the author [21], and for variable impulse time by the author [22], A. Ramakrishnan [18] and for the case of recurrent process by J. M. Hammersley [10] and the author [25]. Successive selections are treated by Rest Jost [11] and S. Malmquist [15]. The model II for an underlying Poisson process and for constant impulse time is discussed by C. Levert and W. L. Scheen [14], L. Kosten [12] and W. Feller [7] and for a variable impulse time by the author [23], [24], J. M. Hammersley [10] and A. Ramakrishnan [18]. The case of a primary recurrent process is dealt by F. Pollaczek [17]. The general problem of selection is discussed by G. E. Albert and L. Nelson [1], in case, when the underlying process is Poissonian and the impulse time is constant.

In the following we shall discuss the problem of the general selection only in the special case $\gamma_n \equiv \alpha$ (constant); models I and II will be discussed in the General case too. The results obtained here contain as a special case all the above mentioned results, except the paper [9] by B. V. Gnedenko, in which the case when the primary process is a non homogeneous Poisson process is also discussed. We shall not deal with this problem here.

§ 3. Determination of the probability distribution of the number of primary events in a given time interval

Consider the recurrent sequence of events $\{t_n\}$. Denote by η_t the number of events occuring in the time interval $[0, t)$. Let us put $\mathbf{P}\{\eta_t \leqslant n\} = W(t, n)$. As the event $\eta_t \leqslant n$ is the same as the event $t < t_{n+1}$, we have

$$W(t, n) = \mathbf{P}\{t < t_{n+1}\} = 1 - \mathbf{P}\{t_{n+1} \leqslant t\} = 1 - F_{n+1}(t), \qquad (1)$$

where $F_n(t)$ denotes the n times iterated convolution of the distribution function $F(t)$ with itself. ($F_0(t) = 1$ if $t \geqslant 0$ and $F_0(t) = 0$ if $t < 0$).

The expectation of η_t is given by

$$m(t) = \mathbf{M}\{\eta_t\} = \sum_{n=1}^{\infty} F_n(t) \tag{2}$$

and the variance of η_t by

$$d^2(t) = \mathbf{D}^2\{\eta_t\} = \sum_{n=1}^{\infty} (2n-1) F_n(t) - [m(t)]^2, \tag{3}$$

supposed that they exist. We have for $\mathbf{P}\{\eta_{T+t} - \eta_T \leqslant n\} = W_T(t, n)$

$$W_T(t, n) = 1 - F_T^*(t) * F_n(t), \tag{4}$$

where

$$F_T^*(t) = \int_T^{T+t} [1 - F(T + t - u)]\, dm(u).$$

The formula (4) can be proved in the same way as (1). We have to take into consideration only that $F_T^*(t)$ is the probability that the next event after T occurs in the time interval $(T, T + t)$. This fact can be easily seen, namely $F_T^*(t)$ is equal to the probability that in the time interval $(T, T + t)$ there occurs at least one event. This latter event can be realised in several mutually exclusive ways, namely the last event occuring in the time interval $(T, T + t)$ will be $t_1, t_2, \ldots, t_n, \ldots$ resp. It follows that

$$F_T^*(t) = \sum_{n=1}^{\infty} \int_T^{T+t} [1 - F(T + t - u)]\, dF_n(u)$$

which, taking (2) into account, leads to the above expression for $F_T^*(t)$.

If we suppose that $F(x)$ is not a lattice-distribution and its average μ is finite then (D. Blackwell [2] and J. L. Doob [4]) the limit $\lim_{T \to \infty} F_T^*(t) = F^*(t)$ exists and we have

$$F^*(t) = \frac{1}{\mu} \int_0^t [1 - F(u)]\, du. \tag{5}$$

Hence the limiting distribution $\lim_{T \to \infty} W_T(t, n) = W^*(t, n)$ also exists and

$$W^*(t, n) = 1 - F^*(t) * F_n(t). \tag{6}$$

This probability gives the stationary distribution of η_t in the strict sense, that is the probability, that in a process going on since an infinitely long time a most n events take place in a time interval of length t. If $F(x)$ is a lattice distribution, $W^*(t, n)$ can not be considered as the limit of $W_T(t, n)$ but it can be interpreted in such cases as a stationary distribution in the weak sense. Let us choose in the time interval $(0, T)$ random moment τ with a uniform distribution. Denote by $\overline{W}_T(t, n)$ the probability that in the time interval $(\tau, \tau + t)$ at most n events occur-

It is easily seen, that

$$\overline{W}_T(t, n) = 1 - \overline{F}_T(t) * F_n(t), \tag{7}$$

where

$$\overline{F}_T(t) = \int_0^t [1 - \quad (t-u)] \frac{m(T+u) - m(u)}{T} du.$$

If $\mu < \infty$, then

$$\lim_{t \to \infty} \frac{m(t)}{t} = \frac{1}{\mu}. \tag{8}$$

(S. Täcklind [26], [27], W. Feller [5]) thus it follows that $\lim_{T \to \infty} \overline{F}_T(t) = F^*(t)$ where $F^*(t)$ is defined by (5). Consequently in case $\mu < \infty$ we have

$$\lim_{T \to \infty} \overline{W}_T(t, n) = W^*(t, n),$$

where $W^*(t, n)$ is defined by (6). In this case $W^*(t, n)$ is called the stationary distribution in the wide sense.

It has been shown ([26], [27], [5]) that the limit

$$\lim_{t \to \infty} \frac{d^2(t)}{t} = \frac{\sigma^2}{\mu^3} \tag{9}$$

also exists.

If $F(x)$ is not a lattice distribution, then we have (D. Blackwell [2], J. L. Doob [4]) for $h > 0$

$$\lim_{t \to \infty} \frac{m(t+h) - m(t)}{h} = \frac{1}{\mu} \tag{10}$$

and by some further restrictions concerning $F(x)$ (S. Täcklind [29], W. Feller [5], D. R. Cox and W. L. Smith [3]) it is also true, that

$$\lim_{t \to \infty} m'(t) = \frac{1}{\mu}. \tag{11}$$

With the aid of an idea by W. Feller [6] it can be easily shown that if $t \leftarrow \infty$ then η_t resp. $\eta_{T+t} - \eta_T$ are asymptotically normally distributed with mean t/μ and variance $\sigma^2 t/\mu^3$.

§ 4. The determination of the probability laws of the selected sequence of events

We have already mentioned in § 1, that the sequence of events $\{t_n'\}$ like the sequence $\{t_n\}$ is a recurrent one. Thus we can determine the probability laws of the sequence of events $\{t_n'\}$ by the same way, as in § 3 when treating the sequence $\{t_n\}$, we must merely replace $F(x)$ by $G(x)$. Thus the problem is reduced to the determination of the distribution function $G(x)$.

We introduce the following notations. Let the Laplace — Stieltjes transform of $G(x)$ be denoted by

$$\gamma(s) = \int_0^\infty e^{-sx} dG(x), \quad (\Re(s) \geqslant 0). \tag{12}$$

Furthermore let us put $\mathbf{M}\{\nu_t\} = M(t)$; then we have by (12)

$$M(t) = \sum_{n=1}^{\infty} G_n(t). \tag{13}$$

Finally let us put

$$\mu(s) = \int_0^{\infty} e^{-st} dM(t). \tag{14}$$

1. *The case of the general selection rule.* To determine $G(x)$ we follow a round about way. Consider the average function $M(t)$. If $M(t)$ is known, $G(x)$ can be determined too. Namely according to (13) we have

$$\mu(s) = \frac{\gamma(s)}{1-\gamma(s)} \tag{15}$$

and thus

$$\gamma(s) = \frac{\mu(s)}{1+\mu(s)}. \tag{16}$$

Knowing $\gamma(s)$, the distribution function $G(x)$ can be uniquely determined.

Now suppose $\chi_n \equiv \alpha$ (constant). Then $M(t) = 0$ for $t < \alpha$ for $t \geqslant \alpha$ $M(t)$ can be determined by aid of the following integral equation:

$$M(t) = \Phi(t) - \Phi(\alpha) + \int_0^t M(t-y)\, d\Phi(y) \tag{17}$$

where the distribution function $\Phi(t)$ is given by

$$\Phi(t) = \begin{cases} pm^*(t) & \text{if } 0 < t < \alpha \\ m_\alpha^*(t) - m_\alpha^*(\alpha) + pm^*(\alpha) & \text{if } \alpha \leqslant t < \infty \end{cases}, \tag{18}$$

where $m^*(t) = \sum_{n=1}^{\infty} (1-p)^{n-1} F_n(t)$, and

$$m_\alpha^*(t) = F(t) + (1-p)\int_0^{\alpha} F(t-y)\, dm^*(y).$$

This equation can be deduced as follows: Denote by t_ν the first event between $t_1, t_2, \ldots, t_n, \ldots$, which gives rise to an impulse. Then the conditional expectation of ν_t under the condition $t_\nu = y$ is given by

$$\mathbf{M}\{\nu_t \mid t_\nu = y\} = \begin{cases} M(t-y) & \text{if } 0 < y \leqslant \alpha \\ 1 + M(t-y) & \text{if } \alpha < y \leqslant t \\ 0 & \text{if } t < y < \infty. \end{cases}$$

further $\mathbf{P}\{t_\nu \leqslant y\} = \Phi(y)$.

This can be proved easily, if we take into consideration, that

$$\mathbf{P}\{t_\nu \leqslant y\} = \sum_{n=1}^{\infty} \mathbf{P}\{\nu = n,\ t_n \leqslant y\}.$$

We obtain from (17)

$$\mu(s) = \frac{\int_{\alpha}^{\infty} e^{-st} d\Phi(t)}{1 - \int_{0}^{\infty} e^{-st} d\Phi(t)} \tag{19}$$

and thus according to (16) we obtain

$$\gamma(s) = \frac{\int_{\alpha}^{\infty} e^{-st} d\Phi(t)}{1 - \int_{0}^{\alpha} e^{-st} d\Phi(t)}. \tag{20}$$

By aid of (20) $G(x)$ can be uniquely determined. Especially we have

$$M = \frac{\int_{0}^{\infty} x d\Phi(x)}{1 - \Phi(\alpha)}$$

and

$$S^2 + M^2 = \frac{\int_{0}^{\infty} x^2 d\Phi(x)}{1 - \Phi(\alpha)} + 2\frac{\int_{0}^{\alpha} x d\Phi(x) \int_{0}^{\infty} x d\Phi(x)}{[1 - \Phi(\alpha)]^2}.$$

$P(t) = 0$ if $t < \alpha$; for $t \geqslant \alpha$ $P(t)$ can be determined from the following integral equation:

$$P(t) = 1 - \Phi(t) + \int_{0}^{t} P(t - y)\, d\Phi(y). \tag{21}$$

Namely $P(t)$ is the probability that all impulses started in the time interval $(0, t)$ are finished at the moment t. If $t \geqslant \alpha$ this event can occur in the following ways: 1) $t_\nu > t$, 2) $t_\nu = y$ where $0 < y \leqslant t$, but all impulses started in the time interval (y, t) are already finished at moment t.

Let the Laplace-transform of $P(t)$ be

$$\pi(s) = \int_{0}^{\infty} e^{-st} P(t)\, dt \tag{22}$$

then by (21) we have

$$\pi(s) = \frac{\int_{\alpha}^{\infty} [1 - \Phi(t)]\, e^{-st} dt}{1 - \int_{0}^{\infty} e^{-st} d\Phi(t)}. \tag{23}$$

If the limit $P = \lim_{t \to \infty} P(t)$ exists, then we have $P = \lim_{s \to 0} s\pi(s)$ and so

$$P = \frac{\int_{\alpha}^{\infty} [1 - \Phi(t)]\, dt}{\int_{0}^{\infty} [1 - \Phi(t)]\, dt}. \tag{24}$$

If especially $\{t_n\}$ is a Poisson process with density λ, then we obtain easily that

$$\Phi(t) = \begin{cases} 1 - e^{-\lambda p t} & \text{if } 0 \leqslant t < \alpha \\ 1 - e^{-\lambda t + \lambda\alpha(1-p)} & \text{if } \alpha \leqslant t < \infty. \end{cases}$$

2. *The case of model I.* The distribution function $G(x)$ has the following explicit form

$$G(x) = \int_0^x \left\{ \int_y^x [1 - F(x-u)]\, dm(u) \right\} dH(y). \tag{25}$$

Proof: Evidently $G(x) = P\{t_1' \leqslant x\}$. Consider the conditional distribution function $\mathbf{P}\{t_1' \leqslant x \mid \chi_0 = y\}$. If $x < y$ then obviously $\mathbf{P}\{t_1' \leqslant x \mid \chi_0 = y\} = 0$ and if $x \geqslant y$, then

$$\mathbf{P}\{t_1' \leqslant x \mid \chi_0 = y\} = \sum_{n=1}^{\infty} \int_y^x [1 - F(x-u)]\, dF_n(u) = \int_y^x [1 - F(x-u)]\, dm(u),$$

which can be proved by the following way: The probability in question is equal to the probability, that in the time interval (y, x) there can be found at least one event from the sequence $\{t_n\}$. This latter event can be realised in several mutually exclusive ways: the last event in the time interval (y, x), which belongs to $\{t_n\}$ can be $t_1, t_2, \ldots, t_n, \ldots$. Thus we obtain (25) by using the formula

$$\mathbf{P}\{t_1' \leqslant x\} = \int_0^{\infty} \mathbf{P}\{t_1' \leqslant x \mid \chi_0 = y\}\, dH(y).$$

According to (25) we have

$$M = \mu \int_0^{\infty} [1 + m(x)]\, dH(x),$$

and

$$S^2 + M^2 = (\sigma^2 + \mu^2) \int_0^{\infty} [1 + m(x)]\, dH(x) + 2\mu \int_0^{\infty} \left[\int_0^x u\, dm(u) \right] dH(x),$$

supposed that they exist.

It can be easily seen that the probability $P(t)$ can be expressed in the following form:

$$P(t) = H(t) \left[1 - \int_0^t (1 - H(t-u))\, dM(u) \right]. \tag{26}$$

If we suppose that $G(x)$ is not a lattice-distribution and its average M is finite then by (10) we have for $h>0$

$$\lim_{t\to\infty}\frac{M(t+h)-M(t)}{h}=\frac{1}{M}.$$

Using this fact, we obtain from (26)

$$P=\lim_{t\to\infty}P(t)=1-\frac{\alpha}{M}. \tag{27}$$

3. *The case of the model II.* We have mentioned already, that the Laplace — Stieltjes transform $\gamma(s)$ of $G(x)$ can be obtained by the following way

$$\gamma(s)=\frac{\int_0^\infty e^{-st}dM(t)}{1+\int_0^\infty e^{-st}dM(t)}. \tag{28}$$

$M(t)$ can be determined by solving the following integral equation

$$M(t)=\int_0^t H(y)\,dF(y)+H(t)\int_0^t M(t-y)\,dF(y)-$$
$$-\int_0^t\left[\int_y^t M(z-y)\,dH(z)\right]dF(y). \tag{29}$$

(29) can be proved by the following way: For the conditional expectation $\mathbf{M}\{\nu_t \mid \chi_0=z,\ t_1=y\}$ we obtain

$$\mathbf{M}\{\nu_t \mid \chi_0=z,\ t_1=y\}=\begin{cases}1+M(t-y) & \text{if } 0<y\leqslant t,\ 0<z\leqslant y\\ M(t-y)-M(z-y) & \text{if } 0<y\leqslant t,\ y<z\leqslant t\\ 0 & \text{otherwise,}\end{cases}$$

and thus we obtain for $M(t)=\mathbf{M}\{\nu_t\}$ the formula:

$$M(t)=\int_0^t[1+M(t-y)]\,H(y)\,dF(y)+$$
$$+\int_0^t\left\{\int_y^t[M(t-y)-M(z-y)]\,dH(z)\right\}dF(y),$$

which agrees with (29).

$P(t)$ satisfies the following integral equation

$$P(t)=H(t)\left[1-F(t)+\int_0^t P(t-x)\,dF(x)\right]. \tag{30}$$

The proof of (30) is as follows: At the moment t there is no impulse in course if the impulse started at $t_0=0$ is finished before the moment t and either $t_1>t$ or $t_1=x$ where $0<x\leqslant t$ but the impulses started in time interval $(x,\ t)$ are all finished before the moment t.

The solution of the integral equations (29) resp. (30) can be given explicitely for some special cases.

Examples. 1. Suppose that $\{t_n\}$ is a Poisson process with event density λ. Then we have $F(x) = 1 - e^{-\lambda x}$ if $x \geqslant 0$ and $F(x) = 0$ if $x < 0$. Furthermore we can easily see, that $M'(t) = \lambda P(t)$. So it remains to determine $P(t)$. Let us put $P(t) = e^{-\lambda t} H(t) R(t)$, then by differentiating (30) we obtain a differential equation for $R(t)$, which can be solved easily, and we obtain

$$P(t) = H(t)\, e^{-\lambda \int_0^t [1-H(x)]dx} \tag{31}$$

and

$$\gamma(s) = 1 - \frac{\lambda}{\lambda + s}\left\{\int_0^\infty e^{-st-\lambda \int_0^t [1-H(x)]dx}\, dt\right\}^{-1}. \tag{32}$$

It follows

$$P = \lim_{t\to\infty} P(t) = e^{-\lambda\alpha}$$

and further $M = e^{\lambda\alpha}/\lambda$ and

$$S^2 = \frac{2e^{2\lambda\alpha}}{\lambda}\int_0^\infty [P(t) - e^{-\lambda\alpha}]\, dt + \frac{e^{2\lambda\alpha}}{\lambda^2}.$$

2. Let $\{t_n\}$ be a recurrent process and $\chi_n \equiv \alpha$ (constant), i. e. $H(x) = 1$ if $x \geqslant \alpha$ and $H(x) = 0$ if $x < \alpha$. In this case we can apply the formulae for the general case by substituting $p = 1$ and we obtain the simple formula $\Phi(t) = F(t)$.

3. Suppose $\{t_n\}$ is a recurrent process and the random variables $\chi_n (n = 0, 1, 2, \ldots)$ have an exponential distribution $H(x) = 1 - e^{-x/\alpha}$ if $x \geqslant 0$ and $H(x) = 0$ if $x < 0$. Denote by $\varphi(s)$ the Laplace — Stieltjes transform of $F(x)$. Taking the Laplace — Stieltjes transform of (29) we obtain

$$\mu(s) = \frac{\varphi(s) - \varphi\left(s + \frac{1}{\alpha}\right)}{1 - \varphi(s)} - \frac{\varphi\left(s + \frac{1}{\alpha}\right)}{1 - \varphi(s)}\,\mu\left(s + \frac{1}{\alpha}\right).$$

By successive applications of this formula we can express $\mu(s)$ with the aid of $\mu\left(s + \frac{n}{\alpha}\right)$, $(n = 1, 2, 3, \ldots)$ resp. If we take into consideration that $\mu\left(s + \frac{n}{\alpha}\right) \to 0$ if $n \to \infty$ then finally we get an explicite form for $\mu(s)$, namely:

$$\mu(s) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{\varphi\left(s + \frac{n}{\alpha}\right) - \varphi\left(s + \frac{n+1}{\alpha}\right)}{1 - \varphi\left(s + \frac{n}{\alpha}\right)} \prod_{j=0}^{n-1} \frac{\varphi\left(s + \frac{j}{\alpha}\right)}{1 - \varphi\left(s + \frac{j}{\alpha}\right)} =$$

$$= \frac{1}{\varphi(s)} \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \prod_{j=0}^{n} \frac{\varphi\left(s + \frac{j}{\alpha}\right)}{1 - \varphi\left(s + \frac{j}{\alpha}\right)}, \tag{33}$$

where in the first expression for $n = 0$ the empty product is equal 1.

By (33) the transform $\gamma(s)$ can be expressed in the following form

$$\gamma(s) = \frac{\mu(s)}{1+\mu(s)}.$$

Now if M exists, then we have $M = \lim_{s\to 0}(1-\gamma(s))/s = \lim_{s\to 0} 1/s\mu(s)$. Consequently

$$M^{-1} = \lim_{s\to 0} s\mu(s) = \frac{1}{\mu}\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n \prod_{j=1}^{n}\frac{\varphi\left(\frac{j}{\alpha}\right)}{1-\varphi\left(\frac{j}{\alpha}\right)},$$

where we used $\mu = \lim_{s\to 0}(1-\varphi(s))/s$.

To determine $P(t)$ consider the equation (30). Let $\pi(s)$ be the Laplace-transform of $P(t)$, i. e.

$$\pi(s) = \int_0^{\infty} e^{-st}P(t)\,dt.$$

Then by (30) we have

$$\pi(s) = \frac{1}{s} - \frac{\alpha}{1+\alpha s}\frac{1-\varphi\left(s+\frac{1}{\alpha}\right)}{1-\varphi(s)} - \frac{\varphi\left(s+\frac{1}{\alpha}\right)}{1-\varphi(s)}\pi\left(s+\frac{1}{\alpha}\right).$$

Proceeding as before, we obtain

$$\pi(s) = \frac{1}{s} + \frac{1}{\varphi(s)}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n\alpha}{n+\alpha s}\prod_{j=0}^{n-1}\frac{\varphi\left(s+\frac{j}{\alpha}\right)}{1-\varphi\left(s+\frac{j}{\alpha}\right)}, \tag{34}$$

whence by inversion $P(t)$ can be determined.

If the limit $P = \lim_{t\to\infty} P(t)$ exists, then we have $P = \lim_{s\to 0} s\pi(s)$ and with the aid of (34) we obtain

$$P = 1 + \frac{\alpha}{\mu}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n}\prod_{j=1}^{n-1}\frac{\varphi\left(\frac{j}{\alpha}\right)}{1-\varphi\left(\frac{j}{\alpha}\right)}. \tag{35}$$

In possession of the above formulae several problems of the theory of counters can be solved; we can determine the change of the density of events caused by successive selections stage by stage. Knowing $P(t)$ we are able to solve some coincidence problems arising in cases when many counters are used to observe particles. We shall treat these and other problems at an other occasion.

Поступила в редакцию
22. 12. 55

BIBLIOGRAPHY

[1] G. E. Albert and L. Nelson, Contributions to the statistical theory of counter data, Annals of Mathematical Statistics, 24 (1953), 9—22.
[2] D. Blackwell, A renewal theorem, Duke Mathematical Journal, 15 (1948), 145—151.
[3] D. R. Cox—W. L. Smith, A direct proof of a fundamental theorem of renewal theory, Skandinavisk Aktuarietidskrift, 53 (1953), 139—150.

[4] J. L. Dood, Renewal theory from the point of view of the theory of probability, Transactions of the American Mathematical Society, Vol. 63 (1948), 422—438.
[5] W. Feller, On the integral equation of renewal theory, Annals of Mathematical Statistics, 12 (1941), 243—267.
[6] W. Feller, Fluctuation theory of recurrent events, Transactions of the American Mathematical Society, 57 (1947), 98—119.
[7] W. Feller, On probability problems in the theory of counters, Courant Anniversary Volume, 1948, 105—115.
[8] J. Giltay, A counter arrangement with constant resolving time, Physica, Vol. 10 (1943), 725—734.
[9] Б. В. Гнеденко, К теории счетчиков Гейгер — Мюллера, Журнал экспериментальной и теоретической физики, 11 (1941), 101—106.
[10] J. M. Hammersley, On counters with random dead time I, Proceedings of the Cambridge Philosophical Society, 49 (1953), 623—637.
[11] Res Jost, Bemerkungen zur mathematischen Theorie der Zähler, Helvetica Physica Acta, 20 (1947), 173—182.
[12] L. Kosten, On the frequency distribution of the number of discharges counted by a Geiger — Müller counter in a constant interval. Physica, Vol. 10 (1943), 749—756.
[13] I. D. Kurbatov — H. B. Mann, Correction of G — M Counter Data, Physical Review, Vol. 68 (1945), 40—43.
[14] C. Levert — W. L. Scheen, Probability fluctuations of discharges in a Geiger — Müller counter produced by cosmic radiation, Physica, Vol. 10 (1943), 225—238.
[15] S. Malmquist, A statistical problem connected with the counting of radioactive particles, Annals of Mathematical Statistics, Vol. 18 (1947), 225—264.
[16] H. B. Mann, A note on the correction of Geiger — Müller counter data, Quarterly Applied Mathematics, 4 (1946), 307—309.
[17] F. Pollaczek, Sur la theorie stochastique des compteurs électroniques, Comptes Rendus Acad. Sci. Paris, 238 (1954), 766—768.
[18] A. Ramakrishnan, Counters with random dead time, Philosophical Magazine, 45 (1954), 1050—1052.
[19] A. E. Ruark — F. E. Brammer, The efficiency of counters and counter circuits, Physical Review, 52 (1937), 322—324.
[20] L. I. Schiff, Statistical Analysis of Counter Data, Physical Review, Vol. 50 (1936), 88—96.
[21] L. Takacs, Wahrscheinlichkeitstheoretische Behandlung von Koinzidenz-Erscheinungen, mit Ereignissen gleicher Zeitdauer, Az Elso Magyar Matematikai Kongresszus Közleményei, (1950), 731—740.
[22] L. Takacs, Occurence and coincidence phenomena in case of happenings with arbitrary distribution law of duration, Acta Mathematica Academiae Scientiarum Hungaricae, 2 (1951), 275—298.
[23] L. Takacs, On processes of happenings generated by means of a Poisson process, Acta Mathematica Academiae Scientiarum Hungaricae, 6 (1955), 81—99.
[24] L. Takacs, A new method for discussing recurrent stochastic processes, A Magyar Tudomanyos Akadémia Alkalmazott Mathematikai Intézetének Közleményei, 2 (1953), 135—151.
[25] L. Takacs, On a probability problem arising in the theory of counters, Proceedings of the Cambridge Philosophical Society, to appear.
[26] S. Täcklind, Elementare Behandlung vom Erneuerungsproblem für den stationären Fall, Skandinavisk Aktuarietidskrift, 1944, 1—15.
[27] S. Täcklind, Fourieranalytische Behandlung vom Erneuerungsproblem, Skandinavisk Aktuarietidskrift, 1945, 68—105.

О ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТИ СОБЫТИЙ, ВЫБРАННЫХ СЧЕТЧИКОМ ИЗ РЕКУРРЕНТНОГО ПРОЦЕССА СОБЫТИЙ

ЛАЙОШ ТАКАЧ (БУДАПЕШТ)

(Резюме)

Рассматривается последовательность случайных величин $\{t_n\}$, где $t_0 = 0$ и разности $t_n - t_{n-1}$ $(n = 1, 2, \ldots)$ являются положительными, независимыми, одинаково распределенными случайными величинами с функцией распределения $F(x)$. При помощи некоторого счетчика из последовательности $\{t_n\}$ выбирается и регистрируется последовательность $\{t'_n\}$ по следующему правилу: 1) $t'_0 = t_0 = 0$; 2) в момент t_0 в счетчике возникает импульс продолжительностью χ_0; 3) если в момент t_n $(n \geqslant 1)$ в счетчике импульса нет (все предшествующие импульсы кончились), то в этот момент с вероятностью 1 возникает новый импульс; 4) если в момент t_n $(n \geqslant 1)$ в счетчике импульс имеется, то новый импульс возникает с вероятностью p; 5) продолжительности импульсов $\chi_0, \chi_1, \chi_2, \ldots$ образуют последовательность положительных, независимых, одинаково распределенных случайных величин с функцией распределения $H(x)$ (может быть, и несобственной); 6) подпоследовательность $\{t_n\}$ состоит из моментов возникновения тех импульсов, которые не перекрываются предшествующими импульсами. При $p = 0$ указанная модель соответствует схеме работы счетчиков Гейгер — Мюллера, при $p = 1$ — схеме работы электронных усилителей.

Последовательность $\{t'_n\}$ обладает свойствами, аналогичными свойствам последовательности $\{t_n\}$. Пусть $G(x)$ — неизвестная функция распределения для разностей $t'_n - t'_{n-1}$ $(n = 1, 2, 3, \ldots)$. С помощью преобразований Лапласа в работе исследуется зависимость $G(x)$ от $F(x)$ для двух случаев:

а) когда $p = 0$ или $p = 1$;

б) когда $0 \leqslant p \leqslant 1$ и функция распределения $H(x)$ является несобственной.

ТЕОРИЯ ВЕРОЯТНОСТЕЙ
И ЕЕ ПРИМЕНЕНИЯ
1956
Том I Выпуск 1

SUR LES LOIS LIMITES DES VARIABLE VECTORIELLES ENCHAÎNÉES AU SENS DE MARKOFF

Par G. MIHOC

1. Considérons m vecteurs d'un espace euclidien V_s à s-dimensions

$$v^h = (v_1^h, v_2^h, \ldots, v_s^h) \quad (h = 1, 2, \ldots, m). \tag{1}$$

Soit $v(t)$ un vecteur aléatoire de l'espace, qui, au moment t, peut prendre une des valeurs v^h conformément à la loi d'une chaîne de Markoff, simple et homogène, à temps discret:

$$\mathbf{P}[v(t+1) = v^k \mid v(t) = v^h] = p_{hk} \tag{2}$$

où

$$p_{hk} \geqslant 0, \qquad \sum_{k=1}^{m} p_{hk} = 1.$$

Considérons le vecteur

$$w(t) = v(1) + v(2) + \ldots + v(t). \tag{3}$$

Nous nous proposons d'étudier le comportement asymptotique de la loi de probabilité du vecteur aléatoire $w(t)$, convenablement normé.

La recherche concernant le cas spécial des vecteurs unitaires

$$\begin{aligned} v^1 &= (1, 0, \ldots, 0) \\ v^2 &= (0, 1, \ldots, 0) \\ &\cdots\cdots\cdots\cdots \\ v^m &= (0, 0, \ldots, 1) \end{aligned} \tag{4}$$

a été entreprise pour la première fois par A. N. Kolmogorov [1]. Ultérieurement, S. H. Siraždinov [2] a apporté d'importantes precisions relativement à la nature asymptotique de la convergence du vecteur (3) vers la loi normale, en se bornant aussi à la considération des vecteurs unitaires (4).

Dans le présent ouvrage nous nous servirons, pour la résolution du problème, d'une méthode basée sur la notion de fonction caractéristique, dont nous en avons fait usage pour le cas où la chaîne prend des valeurs simples [3]. Cependant, nous avons apporté à cette méthode une simplification, qui consiste dans le fait qu'on utilise une relation où ne figure que la valeur caractéristique intéressant la limite. Grâce à ce procédé, le

cas des vecteurs quelconques devient tout aussi facile à traiter que celui des vecteurs unitaires.

2. Lemme I. *Si $\lambda(u)$ est une valeur propre de l'opérateur linéaire*

$$Y_k(u) = \sum_{j=1}^{m} p_{kj} e^{(v^j u)t} X_j(u) \qquad (k = 1, 2, \ldots, m) \qquad (T)$$

où

1. $u = (u_1, u_2, \ldots, u_s)$ *est une variable vectorielle.*
2. $(v^j u)$ *représente le produit scalaire de v^j et u, on a toujours*

$$|\lambda(u)| \leqslant 1,$$

l'égalité étant réalisée, pour tout u, seulement si pour une suite quelconque dans laquelle

$$p_{j_1 j_2} \neq 0, \quad p_{j_2 j_3} \neq 0, \ \ldots, \ p_{j_p j_1} \neq 0,$$

on a

$$\sum_{h=1}^{p} v_l^{j_h} = \rho H_l \qquad (l = 1, 2, \ldots, s)$$

H_l étant une constante.

Dans ce cas

$$\lambda(u) = e^{i \sum_{l=1}^{s} H_l u_l} \mu$$

vérifiant une équation binôme

$$\mu^p = 1. \qquad (p \leqslant m)$$

Lemme II. *Si la matrice stochastique $\| p_{ik} \|$ est formée d'une seule classe finale (essentielle, dans la terminologie de A. N. Kolmogorov) à p sous-classes, alors il existe p valeurs propres, distinctes entre elles, de l'opérateur (T)*

$$\lambda_1(u), \quad \lambda_2(u), \ \ldots, \ \lambda_p(u)$$

telles que

$$|\lambda_1(0)| = 1, \quad |\lambda_2(0)| = 1, \ \ldots, \ |\lambda_p(0)| = 1.$$

Ces valeurs propres vérifient les relations

$$\lambda_k(u) = \alpha^k \lambda_1(u) \quad (k = 1, 2, \ldots, p) \qquad (5)$$

α étant une racine primitive de l'équation

$$x^p = 1.$$

On démontre ces propriétés des valeurs propres de l'opérateur linéaire (T) d'une manière analogue à celle qu'on emploie dans le cas des chaînes de Markoff qui correspondent à $s = 1$.

3. Considérons le cas où la matrice stochastique $\| p_{ik} \|$ est formée d'une seule classe finale.

Notons par Q_h le mineur de l'élément $p_{hh} - 1$ dans le déterminant $| p_{hk} - \delta_{hk} |$ $(h, k = 1, 2, \ldots, m, \ \delta_{hk} = 0$ pour $h \neq k, \ \delta_{hk} = 1$ pour

$h = k$) et par Q_{ij} le mineur, du même déterminant, obtenu en supprimant les lignes et les colonnes de rang i et j.

Notons encore

$$P_h = \frac{Q_h}{\sum_{j=1}^{m} Q_j} \qquad (h = 1, 2, \ldots, m)$$

$$P_{hk} = -\frac{Q_{hk}}{\sum_{j=1}^{m} Q_j} \qquad (h, k = 1, 2, \ldots, m)$$

et introduisons le vecteur a dont les composantes sont

$$a_k = \sum_{j=1}^{m} P_j v_k^j \qquad (k = 1, 2, \ldots, m). \tag{6}$$

Avec ces notations on peut énoncer le théorème suivant.

Théorème. *Si la matrice stochastique* $\| p_{ik} \|$ *forme une seule classe finale, alors le vecteur*

$$\frac{w(t) - at}{\sqrt{t}}$$

suit, pour $t \to \infty$, *la loi s-dimensionnelle, dont la fonction caractéristique est*

$$\varphi(u) = \exp\left\{\frac{1}{2}\left(\sum_{j=1}^{m} P_j \xi_j^2 + 2 \sum_{\substack{j,l=1 \\ (j \neq l)}}^{m} P_{jl} \xi_j \xi_l\right)\right\} \tag{7}$$

où

$$\xi_k = \sum_{h=1}^{m} (v_h^k - a_h)\, u_h \qquad (k = 1, 2, \ldots, m) \tag{8}$$

et $u = (u_1, u_2, \ldots, u_s)$ *est l'argument de la fonction caractéristique.*

Soient $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_m$ les fréquences respectives des valeurs $v^1, v^2, \ldots, v^m$ intervenant dans la composition de la fonction $w(t)$

$$w(t) = \sum_{j=1}^{m} \alpha_j v^j \quad \left(\alpha_j \geqslant 0, \quad \sum_{j=1}^{m} \alpha_j = t\right).$$

Considérons la probabilité

$$P_k(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_m, t) = \mathbf{P}\left[\left(w(t) = \sum_{j=1}^{m} \alpha_j v^j\right) \cap (v(t) = v^k\right]$$

et la fonction

$$F_k(u, t) = \sum_{\alpha} P_k(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_m, t). \exp\left\{\sum_{j=1}^{m} \alpha_j (v^j u) i - t(au) i\right\}.$$

Remarquons tout de suite que $F_k(u, t)$ n'est pas une fonction caractéristique, mais si nous notons par $F(u, t)$ la fonction caractéristique de la variable $w(t) - at$ nous avons

$$F(u, t) = \sum_{k=1}^{m} F_k(u, t). \tag{9}$$

Nous avons les relations

$$F_k(u,\ t) = \sum_{j=1}^{m} p_{jk} \exp\{(v^k u)\, i - (au)\, i\} F_j(u,\ t-1) \quad (k = 1, 2, \ldots, m). \tag{10}$$

Considérons l'opérateur linéaire

$$Y_k(u) = \sum_{j=1}^{m} p_{kj} \exp\{(v^j u)\, i - (au)\, i\} X_j(u). \tag{T'}$$

Soit $\lambda_1(u)$ la valeur propre de (T') pour laquelle $\lambda_1(0) = 1$ et soit

$$H(\lambda_1,\ u) = [H_1(\lambda_1,\ u),\ H_2(\lambda_1,\ u).\ \ldots,\ H_s(\lambda_1,\ u)]$$

le vecteur propre qui correspond à $\lambda_1(u)$.

Etant donné que, pour $u = 0$, les composantes du vecteur $H(\lambda_1,\ u)$ deviennent égales entre elles, et que le vecteur propre $H(\lambda_1,\ u)$ est déterminé à un facteur scalaire près, nous choisissons pour $H(\lambda_1,\ u)$ la valeur dont les composantes, pour $u = 0$, deviennent toutes égales à 1.

De (10) il résulte que, dans un voisinage D du point $u = 0$, on a pour tout $u \in D$

$$\sum_{k=1}^{m} H_k(\lambda_1,\ u) F_k(u,\ t) = \lambda_1(u) \sum_{k=1}^{m} H_k(\lambda_1,\ u) F_k(u,\ t-1)$$

ou

$$\sum_{k=1}^{m} H_k(\lambda_1,\ u) F_k(u,\ t) = \lambda_1^t(u) \sum_{k=1}^{m} H_k(\lambda_1,\ u) F_k(u,\ 0).$$

Si l'on change u en $\frac{u}{\sqrt{t}}$ et si l'on fait t tendre vers l'infini, tout en tenant compte de (9) et du fait que $H(1,\ 0) = 1$, on obtient

$$\lim_{t \to \infty} F\left(\frac{u}{\sqrt{t}},\ t\right) = \lim_{t \to \infty} \lambda_1^t\left(\frac{u}{\sqrt{t}}\right).$$

En supposant que l'une, au moins, des dérivées $\left[\frac{\partial^2 \lambda_1(u)}{\partial u_h \partial u_k}\right]_{u=0}$ soit différente de zéro, on peut facilement montrer que

$$\lim_{t \to \infty} F\left(\frac{u}{\sqrt{t}},\ t\right) = \exp\left\{\frac{1}{2} \sum_{h,k} \left(\frac{\partial^2 \lambda_1(u)}{\partial u_h \partial u_k}\right)_{u=0} u_h u_k\right\} \tag{11}$$

$\lambda_1(u)$ étant une valeur propre de (T'), elle vérifie l'équation

$$\left| p_{kj} \exp\{(v^j u)\, i - (au)\, i\} - \lambda_1(u)\, \delta_{kj} \right| = 0$$

où $\delta_{kj} = 1$ pour $k = j$ et $\delta_{kj} = 0$ pour $k \neq j$. $\lambda_1(u)$ admet des dérivées partielles de tout ordre, bornées dans D. De cette relation on obtient par dérivation

$$\left(\frac{\partial^2 \lambda_1(u)}{\partial u_h \partial u_k}\right)_{u=0} = \sum_{j=1}^{m} (v_h^j - a_h)(v_k^j - a_k) P_j + \sum_{\substack{i,j=1 \\ (i \neq j)}}^{m} (v_h^i - a_h)(v_k^j - a_k) P_{ij}$$

et, en introduisant ces valeurs dans (11), la propriété mentionnée en résulte.

4. La forme quadratique figurant dans la formule (7) est non-négative, comme nous le démontrons ci-dessous. La loi limite est donc une loi normale multidimensionnelle. Il est évident que la détermination du rang de cette loi présente un intérêt spécial.

Considérons la chaîne de Markoff homogène, à temps discret, unidimimensionnelle, pouvant prendre les valeurs (8): $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_m$ avec les probabilitées de passage que nous avons considérées jusqu'à présent p_{hk}

$$p_{hk} \geqslant 0, \qquad \sum_{k=1}^{m} p_{hk} = 1.$$

Soit S_n la somme des valeurs $\xi_j (j = 1, 2, \ldots, m)$ que la chaîne peut prendre en n épreuves consécutives.

On démontre [3] que

$$\frac{1}{n}\mathbf{D}^2(S_n) = -\frac{1}{2}\left(\sum_{j=1}^{m} P_j \xi_j^2 + 2 \sum_{\substack{j,\, l=1 \\ (j \neq l)}}^{m} P_{jl}\xi_j\xi_l\right) + O\left(\frac{1}{n}\right)$$

où $\mathbf{D}^2(S_n)$ signifie la variance de S_n.

On voit que

$$\psi(u) = -\frac{1}{2}\left[\sum_{j=1}^{m} P_j \xi_j^2 + 2 \sum_{\substack{j,\, l=1 \\ (j \neq l)}}^{m} P_{jl}\xi_j\xi_l\right] \geqslant 0$$

$\psi(u)$ est une forme quadratique non-négative à s variables $u_1, u_2, \ldots, u_s$.

Considérons d'abord le cas $s \geqslant m$.

Le système à $m - 1$ équations linéaires en s variables $u_1, u_2, \ldots, u$

$$\sum_{h=1}^{s} v_h^1 u_h = \sum_{h=1}^{s} v_h^2 u_h = \ldots = \sum_{h=1}^{s} v_h^m u_h \qquad (12)$$

admet en général ∞^{s-m+1} solutions $u_1^0, u_2^0, \ldots, u_s^0$.

Pour toutes ces solutions on a $\xi_1 = \xi_2 = \ldots = \xi_m$ et par conséquent $\mathbf{D}^2(S_n) = 0$ quel que soit n. Il en résulte que $\psi(u^0) = 0$ pour ∞^{s-m+1} s ystème de valeurs $u_1^0, u_2^0, \ldots, u_s^0$.

Si $s \geqslant m$, la loi limite est une loi normale singulière, de rang $m - 1$ au plus.

On obtient un rang inférieur à $m - 1$, seulement si l'on particularise les vecteurs $v^1, v^2, \ldots, v^m$.

Considérons maintenant le cas $s < m$.

En général le système (12) ne peut plus être satisfait. On a pour tout système de valeurs $u_1^\circ, u_1^\circ, \ldots, u_s^\circ$:

$$\psi(u^\circ) > 0.$$

Si $s < m$, la loit limite est en général une loi normale non-singulière.

Cependant il existe, même dans ce cas, des matrices $\| p_{ik} \|$ qui nous conduisent à des lois normales singulières, quel que soit le système de vecteures $v^h (h = 1, 2, \ldots, m)$.

Considérons une suite de la forme

$$p_{j_1 j_2} \neq 0, \quad p_{j_2 j_3} \neq 0, \quad \ldots, \quad p_{j_\rho j_1} \neq 0,$$

où les indices $j_1, j_2, \ldots, j_\rho$ peuvent prendre les valeurs de 1 à m et sont tous differents entre eux, en ne considérant pas comme distinctes deux suites avec les mêmes indices $j_1, j_2, \ldots, j_\rho$ pris dans un ordre différent.

Supposons qu'il existe p suites différentes entre elles.

Pour que

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \mathbf{D}^2(S_n) = 0,$$

on sait [4] que pour deux suites distinctes

$$p_{j_1 j_2} \neq 0, \quad p_{j_2 j_3} \neq 0, \quad \ldots, \quad p_{j_\rho j_1} \neq 0,$$

$$p_{j_1 j'_2} \neq 0, \quad p_{j'_2 j'_3} \neq 0, \quad \ldots, \quad p_{j'_\rho j_1} \neq 0$$

on doit avoir les relations

$$\frac{\xi_{j_1} + \xi_{j_2} + \ldots + \xi_{j_\rho}}{\rho} = \frac{\xi_{j_1} + \xi_{j'_2} + \ldots + \xi_{j'_\sigma}}{\sigma}. \tag{13}$$

On a donné $p-1$ relations (13), c'est à dire $p-1$ relations linéaires entre les variables $u_1, u_2, \ldots, u_s$. Quel que soit le système de vecteurs v^j $(j = 1, 2, \ldots, m)$, il existe ∞^{s-p+1} systèmes de valeurs $u_1^\circ, u_2^\circ, \ldots, u_s^\circ$ qui vérifient les relations (13) et pour lesquels on a

$$\psi(u^\circ) = 0.$$

Il en résulte que

La loi limite correspondante est une loi normale singulière, de rang $p-1$ au plus.

Dans ce cas aussi on obtient un rang inférieur à $p-1$, seulement si l'on particularise les vecteurs $v^1, v^2, \ldots, v^m$.

Exemple. Considérons les probabilités de passage

$$\begin{vmatrix} 0 & 0 & p_{13} \\ p_{21} & 0 & 0 \\ p_{31} & p_{32} & 0 \end{vmatrix} \quad \begin{matrix} p_{13} = 1 \\ p_{21} = 1 \end{matrix}.$$

Elles forment une classe finale.

Le vecteur aléatoire $v(t)$ peut prendre dans l'espace V_3 les valeurs suivantes:

$$v^1 = (v_1^1, v_2^1, v_3^1), \quad v^2 = (v_1^2, v_2^2, v_3^2), \quad v^3 = (v_1^3, v_2^3, v_3^3).$$

Il y a deux suites

$$p_{13} \neq 0, \quad p_{31} \neq 0,$$

$$p_{13} \neq 0, \quad p_{32} \neq 0, \quad p_{21} \neq 0.$$

Par conséquent

$$p = 2.$$

Donc on obtiendra, comme loi limite, une loi normale singulière de rang 1. En effet, on a, avec notations déjà utilisées:

$$P_1 = \frac{1}{p_{32}+2}, \quad P_2 = \frac{p_{32}}{p_{32}+2}, \quad P_3 = \frac{1}{p_{32}+2}, \quad P_{12} = P_{23} = P_{31} = \frac{1}{p_{32}+2},$$

$$a_k = \frac{1}{p_{32}+2}(v_k^1 + p_{32}v_k^2 + v_k^3) \qquad (k = 1,\ 2,\ 3),$$

$$\xi_k = \sum_{s=1}^{3}\left[v_s^k - \frac{1}{p_{32}+2}(v_s^1 + p_{32}v_s^2 + v_s^3)\right]u_s,$$

$$\sum_{j=1}^{m} P_j\xi_j^2 + 2\sum_{j,\,l} P_{jl}\xi_j\xi_l = -\frac{p_{31}p_{32}}{(p_{32}+2)^3}\left[\sum_{s=1}^{3}(v_s^1 - 2v_s^2 + v_s^3)u_s\right]^2.$$

On obtient donc la loi normale à une seule dimension, quel que soit le système $v^1,\ v^2,\ v^3$

$$\exp\left\{-\frac{p_{31}p_{32}}{2(p_{32}+2)^3}\left[\sum_{s=1}^{3}(v_s^1 - 2v_s^2 + v_s^3)u_s\right]^2\right\}.$$

5. Il reste à examiner le cas où la loi limite n'est pas normale. C'est ce qui arrive si pour toute suite

$$p_{j_1j_2} \neq 0, \quad p_{j_2j_3} \neq 0, \quad \ldots, \quad p_{j_\rho j_1} \neq 0$$

on a $$\sum_{h=1}^{\rho} v_l^{jh} = \rho H_l \qquad (l = 1,\ 2,\ \ldots,\ s)$$

En annulant le moment de premier ordre de la variable $w(t)$ ce que l'on peut toujours réaliser, il en résulte

$$H_l = 0 \qquad (l = 1,\ 2,\ \ldots,\ s).$$

Dans ce cas, d'après le lemma II, les valeurs propres de (T), égales en module à 1, sont les racines $\mu,\ \mu_1,\ \ldots,\ \mu_{p-1}$ de l'équation binôme

$$\mu^p = 1.$$

Notons par $p_j\ (j = 1,\ 2,\ \ldots,\ m)$ la probabilité de l'égalité

$$v(l) = v^j$$

et par $G_j(\lambda,\ u)$ l'expression

$$G_j(\lambda,\ u) = \frac{\sum_{h=1}^{m} G_{hj}(\lambda,\ u)}{\sum_{h=1}^{m} G_{hh}(\lambda,\ u)}$$

où $G_{hj}(\lambda,\ u)$ est le mineur de l'élément situé dans la ligne h et dans la colonne j du déterminant

$$\left| p_{kj}\exp\{(v^j u)\,i\} - \lambda\delta_{kj} \right|$$

où $\delta_{kj} = 0$ pour $k \neq j$ et $\delta_{kj} = 1$ pour $k = j$.

En appliquant à la relation (9) la formule de Perron pour les puissances d'une matrice, on obtient

$$F(t,\ u) = \sum_{j=1}^{m} p_j \exp\{(v^j u)\, i\} + \mu_1^{t-1} \sum_{j=1}^{m} p_j \exp\{(v^j u)\, i\} \cdot G_j(\mu_1,\ u) + \ldots$$

$$\ldots + \mu_{p-1}^{t-1} \sum_{j=1}^{m} p_j \exp\{(v^j u)\, i\}\, G_j(\mu_{p-1}, u) + o(\rho^{t-1})$$

où $$0 < \rho < 1.$$

La formule précédente a été établie dans l'hypothèse que la matrice stochastique forme une seule classe finale. On voit que, dans le cas où cette classe est formée de p sous-classes, $F(u,\ t)$ n'admet pas une limite pour $t \to \infty$, mais qu'elle oscille entre p valeurs.

Les formules précédentes offrent toutes les limites dans le cas où la matrice stochastique $\| p_{hl} \|$ forme une seule classe finale.

6. Le cas de plusieurs classes finales se traite de la même manière. Nous citerons seulement les résultats.

Supposons alors que la matrice stochastique $\| p_{hl} \|$ est formée de r classes finales $A_1,\ A_2,\ \ldots,\ A_r$.

Soient $a^{(1)},\ a^{(2)},\ \ldots,\ a^{(r)}$ les vecteurs fournis par les relations (6) pour chacune des classes finales.

Soit v^k un vecteur appartenant à une classe de passage [5].

Notons par $P_k^{(t)}(A_j)$ la probabilité qu'au moment t le vecteur $v(t)$ prenne une valeur comprise dans la classe finale A_j, sachant que $v(l) = v^k$.

On sait que

$$\lim P_k^{(t)}(A_j) = P_k(A_j) \quad (j = 1,\ 2,\ \ldots,\ r)$$

Considérant alors le vecteur

$$a = \frac{\sum_{j=1}^{r} P_k(A_j)\, a^{(j)}}{\sum_{j=1}^{r} P_k(A_j)}$$

on peut montrer que $\dfrac{w(t) - at}{t}$ tend, pour $t \to \infty$, vers la variable aléatoire prenant les valeurs $a^{(j)} - a\ (j = 1,\ 2,\ \ldots,\ r)$ avec les probabilités respectives $P(A_j)$.

On rencontre une seule exception à la règle précédente, à savoir si

$$a^{(1)} = a^{(2)} = \ldots = a^{(r)}.$$

Dans ce cas, le vecteur

$$\frac{w(t) - at}{\sqrt{t}}$$

tend, pour $t \to \infty$, vers la loi de probabilité ayant la fonction caractéristique

$$\sum_{j=1}^{r} P_k(A_j)\, \varphi_j(u)$$

où $\varphi_j(u)$ est la fonction caracteristique limite (7), correspondante à la classe finale A_j.

Enfin, il y a des cas où le vecteur $w(t) - at$ admet une loi limite de probabilité pour $t \to \infty$. On traite ces cas en suivant la même voie que dans la cas d'une seule classe finale.

7. Les résultats, établis par S. H. Siraždinov sur la nature asymptotique de la convergence vers la loi normale dans le cas des vecteurs unitaires, se conservent aussi dans le cas, traité ici, d'un système quelconque de vecteurs.

Considérons d'abord le cas d'une classe finale avec une seule sousclasse. En appliquant la formule de Perron aux relations (9) et en tenant compte de (8), on obtient, pour tout u dans un voisinage D du point $u = 0$,

$$F(u, t) = A(u)\lambda^t(u) + O(\rho^t), \quad u \in D \tag{14}$$

où $\lambda(u)$ est la valeur propre de l'opérateur (T), de module maximum, simple dans D, admettant des dérivées partielles de tout ordre, bornées dans D, et $\lambda(0) = 1$, où $A(u)$ est une fonction bien déterminée de u, admettant des dérivées partielles de tout ordre, bornées dans D, et $A(0) = 1$, et où ρ est un nombre indépendant de u et de t, et $0 < \rho < 1$.

Cette expression de la fonction caractéristique est identique à celle sur laquelle sont basées les considérations faites par S. H. Siraždinov dans le mémoire [2]. En conséquence, les résultats établis par lui se conservent aussi dans ce cas.

Si l'on se trouve dans le cas d'une classe finale à p sousclasses, en appliquant le même procédé et en tenant compte du lemme II, on obtient, pour tout t dans un voisinage D du point $t = 0$,

$$F(u, t) = A(u)\lambda^t(u) + A_1(u)\alpha_1^t\lambda^t(u) + \ldots + A_{p-1}(u)\alpha_{p-1}^t\lambda^t(u) + O(\rho^t) \tag{15}$$

où $1, \alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_{p-1}$ sont les racines de l'équation

$$x^p = 1,$$

où $A(u), A_1(u), A_2(u), \ldots, A_{p-1}(u)$ sont des fonctions bien déterminées de u, admettant des dérivées partielles de tout ordre, bornées dans D, et

$$A(0) = 1, \quad A_1(0) = 0, \ \ldots, \ A_{p-1}(0) = 0$$

et où ρ est un nombre indépendant de u et t, et $0 < \rho < 1$.

On peut aussi écrire la formule précédente

$$F(u, pt + k) = A_k(t)\lambda^{pt+k}(t) + O(\rho^{pt+k}) \tag{16}$$

où $$A_k(0) = 1 \quad (k = 0, 1, \ldots, p-1)$$

Elle est de la même nature que la formule (14) et, par conséquent, pour $t \to \infty$, on obtient pour chacune des sousclasses des résultats analogues à ceux de S. H. Siraždinov.

Поступила в редакцию
28. 2. 56

BIBLIOGRAPHIE

[1] А. Н. Колмогоров, Локальная предельная теорема для классических цепей Маркова, Изв. АН, сер. матем., **13**, № 4 (1949).
[2] С. Х. Сираждинов, Уточнение предельных теорем для однородных цепей Маркова, ДАН СССР, **84**, № 6 (1952).
[3] O. Onicescu et G. Mihoc, Les chaînes de variables aléatoires. Problèmes asymptotiques, Académie Roumaine. Etudes et Recherches. No. XIV, 1942.
[4] G. Mihoc. Sur les lois — limites des variables liées en chaîne. Buletinul Facultatii de Stiinte din Gernauti. Vol. X, 1936.
[5] Maurice Fréchet. Recherches théoriques modernes sur la calcul des probabilités. Second livre. 1938. Paris, page 176.

О ПРЕДЕЛЬНЫХ ЗАКОНАХ ДЛЯ СЛУЧАЙНЫХ ВЕКТОРОВ, СВЯЗАННЫХ В ЦЕПЬ МАРКОВА

Г. МИХОК (БУХАРЕСТ)

(Резюме)

Пусть $v(1)$, $v(2), \ldots, v(t), \ldots$ последовательности случайных s-мерных векторов, связанных по схеме однородных цепей Маркова. Пусть далее

$$v^h = (v_1^h, v_2^h, \ldots, v_s^h), \quad (h = 1, 2, \ldots, m)$$

возможные значения векторов $v(t)$ $(t = 1, 2, \ldots)$

$$\mathbf{P}(v(t+1) = v^h \mid v(t) = v^h) = p_{hk},$$

где

$$p_{hk} \geqslant 0 \quad \text{и} \quad \sum_{k=1}^{m} p_{hk} = 1.$$

В статье изучается предельное распределение для сумм

$$w(t) = v(1) + v(2) + \ldots + v(t)$$

при $t \to \infty$. Устанавливается, что при некоторых общих условиях, после соответствующей центровки и нормировки случайный вектор $w(t)$ асимптотически будет нормально распределенным. Выясняются различные случаи вырождения в зависимости от соотношений между s и m.

ТЕОРИЯ ВЕРОЯТНОСТЕЙ
И ЕЁ ПРИМЕНЕНИЯ
1956
Том I *Выпуск 1*

О ПРИМЕНЕНИИ МЕТОДОВ МОНТЕ КАРЛО ДЛЯ ОТЫСКАНИЯ НАИМЕНЬШЕГО ХАРАКТЕРИСТИЧЕСКОГО ЧИСЛА И СООТВЕТСТВУЮЩЕЙ СОБСТВЕННОЙ ФУНКЦИИ ЛИНЕЙНОГО ИНТЕГРАЛЬНОГО УРАВНЕНИЯ

В. С. ВЛАДИМИРОВ

1. В последние годы появились работы, посвященные статистическим методам решения ряда физических и математических задач. Эти методы получили название методов Монте Карло. Идея применения методов Монте Карло к приближенному решению задач математической физики принадлежит И. Нейману и С. Улему. Некоторые статистические подходы к различным математическим и физическим проблемам можно найти в статье S. Ulam [1].

Основная идея методов Монте Карло состоит в том, что для изучаемого уравнения строится некоторый случайный процесс, обладающий тем свойством, что случайные величины, вырабатываемые этим процессом, после надлежащей статистической обработки дадут приближенное решение поставленной задачи. Такой случайный процесс, вообще говоря, может быть построен не единственным способом. Если уравнение описывает некоторое физическое явление, то в качестве случайного процесса естественно выбрать процесс, более или менее близко имитирующий это физическое явление.

Выбранный случайный процесс должен допускать простую вычислительную реализацию, а вырабатываемые им случайные величины должны иметь возможно малую дисперсию D. J. H. Curtiss [2] при довольно общих предположениях показал, что статистическая погрешность, возникающая при применении методов Монте Карло, имеет порядок $\sqrt{\frac{D}{N}}$, где N — число реализаций построенного случайного процесса. Такая медленная сходимость требует большого числа повторных реализаций случайного процесса, что может быть осуществлено на быстродействующей вычислительной машине.

В качестве источника случайных элементов может служить какая-либо таблица случайных чисел, например L. H. C. Tippett [3], или так называемые «псевдослучайные» числа: в работе J. Todd [4] для решения задачи Дирихле методом Монте Карло предложен следующий простой способ получения на машине «псевдослучайных» чисел α_n,

$$\alpha_n = 2^{-42} b_n,\ b_n \equiv 5^{17} b_{n-1} \pmod{2^{42}},\ b_0 = 1.$$

Погрешность методов Монте Карло не зависит ни от размерности задачи, ни от ее регулярности (гладкости функций, входящих в задачу). Например, при вычислении кратных интегралов методами Монте Карло статистическая погрешность будет определяться числом N и не будет зависеть ни от кратности интеграла, ни от гладкости подинтегральной функции. Поэтому с развитием быстродействующих вычислительных машин появляется возможность применения методов Монте Карло к приближенному решению таких многомерных нерегулярных задач, которые трудно поддаются обычным численным методам и для которых не требуется большая точность вычислений. Особенно целесообразно применять методы Монте Карло к тем задачам, где нужно получить одно число в качестве ответа, например значение решения в одной единственной точке или определенный интеграл, содержащий это решение.

Как уже отмечалось, основой применения метода Монте Карло к той или иной задаче является соответствующим образом построенный случайный процесс. Построение различного рода случайных процессов для решения неоднородных систем линейных алгебраических уравнений дано в работах G. E. Forsythe, R. A. Leibler [5], W. R. Wasow [6] и J. H. Curtiss [2]. Методы, использованные в работах [5] и [6], непосредственно распространяются и на некоторый класс неоднородных интегральных уравнений: R. E. Cutkosky [7] и J. H. Curtiss [2]. Построение случайного процесса для системы конечноразностных уравнений, соответствующей задаче Дирихле, было впервые дано в работе Р. Куранта, К. Фридрихса и Г. Леви [8].

В настоящей работе строятся случайные процессы для применения методов Монте Карло к приближенному определению первого собственного значения и соответствующей ему собственной функции интегрального уравнения. При этом используются методы работ J. H. Curtiss [2] и R. E. Cutkosky [7].

2. Мы будем рассматривать однородное интегральное уравнение

$$\varphi(P) = \lambda \int_G K(P, P')\,\varphi(P')\,dP', \tag{2.1}$$

где интегрирование совершается по открытому ограниченному множеству G точек P m-мерного пространства R_m. Обозначим через D диаметр множества G, через v его меру и через Γ границу G. Относительно ядра $K(P, P')$ мы будем предполагать, что оно имеет вид

$$K(P', P) = \frac{H(P, P')}{r^\alpha}, \quad 0 \leqslant \alpha < m, \tag{2.2}$$

где $r = |P - P'|$ — расстояние между точками P и P'. Функция $H(P, P')$ предполагается непрерывной по совокупности переменных P и P' из $\bar{G}$ симметричной $H(P, P') = H(P', P)$ и неотрицательной. Кроме того, предположим существование чисел $\varepsilon > 0$ и $h > 0$ таких, что для всех пар точек (P, P') из $G \times G$, удовлетворяющих условию $r = |P - P'| < h$, выполнено неравенство $H(P, P') > \varepsilon$.

Обозначим через H пространство вещественных функций, суммируемых с квадратом на G, со скалярным произведением и нормой,

$$(f, g) = \int_G f(P)\, g(P)\, dP, \quad \| f \| = \sqrt{(f, f)}, \; f, g \in H.$$

На основании сделанных предположений линейный оператор

$$g = Kf = \int_G K(P, P')\, f(P')\, dP'$$

является самосопряженным и вполне непрерывным в пространстве H.

Поэтому его спектр чисто-точечный и состоит из нуля и чисел $\frac{1}{\lambda_i}$, где λ_i — характеристические числа уравнения (2.1). Множество чисел $\frac{1}{\lambda_i}$ не пусто, не более чем счетно и не имеет точек сгущения, кроме, возможно, нуля. Все λ_i — конечной кратности и вещественны, а соответствующие им собственные функции φ_i образуют ортонормальную систему в H, $(\varphi_i, \varphi_k) = \delta_{ik}$.

Кроме того, линейный оператор K вполне непрерывен в пространстве непрерывных функций и сильно положительный относительно конуса непрерывных неотрицательных функций.

Отсюда на основании теоремы Р. Ентча, обобщенной в статье М. Г. Крейна и А. М. Рутмана [9] на вполне непрерывные сильно положительные операторы, заключаем, что уравнение (2.1) имеет единственную положительную собственную функцию $\varphi_1(P)$. Отвечающее ей характеристическое число λ_1 — положительное, простое и меньшее модуля всякого другого характеристического числа этого уравнения. Все собственные функции $\varphi_i(P)$ непрерывны на G.

Отнеся, если необходимо, соответствующий множитель в уравнении (2.1) к λ, всегда можно достичь выполнения условия

$$H(P, P') \leqslant \frac{m - \alpha}{\omega_m D^{m-\alpha}}, \tag{2.3}$$

где ω_m — поверхность единичной сферы в R_m,

$$\omega_m = \int_{|\omega|=1} d\omega = \frac{2\pi^{\frac{m}{2}}}{\Gamma\left(\frac{m}{2}\right)}.$$

Легко проверить, что из (2.3) следуют неравенства

$$|\lambda_i| > 1, \; i = 1, 2, \ldots.$$

Резюмируя сказанное, будем считать

$$1 < \lambda_1 < |\lambda_2| \leqslant |\lambda_3| \leqslant \ldots, \; \varphi_1(P) > 0. \tag{2.4}$$

Из (2.2) заключаем, что при

$$n_0 = \left[\alpha + 1 - \frac{m}{2}\right] + 1 \geqslant 1 \tag{2.5}$$

(символ $[x]$ обозначает целую часть числа x) для всех $P \in G$ будет выполнено неравенство

$$\sum_{i=1}^{\infty} \frac{\varphi_i^2(P)}{\lambda_i^{2n_0}} \leqslant C^2. \tag{2.6}$$

3. Для определения первого характеристического числа λ_1 и соответствующей ему собственной функции $\varphi_1(P)$ применим метод последовательных приближений в форме O. D. Kellogg [10]. Пусть $f_0(P)$ — некоторая положительная непрерывная функция.

Обозначим

$$d_i = (f_0, \varphi_i);\ i = 1, 2, \ldots;\ d_1 > 0.$$

Числа d_i удовлетворяют неравенству Бесселя

$$\sum_{i=1}^{\infty} d_i^2 \leqslant \| f_0 \|^2. \tag{3.1}$$

Определим последовательность функций

$$f_n = K f_{n-1} = K^n f_0, \quad n \geqslant 1 \tag{3.2}$$

и последовательность чисел

$$\lambda_{(n)} = \frac{(f_0, f_{n-1})}{(f_0, f_n)}, \quad n \geqslant 1. \tag{3.3}$$

Лемма. *Для последовательностей* (3.2) *и* (3.3) *существуют такие положительные числа* c_1, c_2 *и* n_1, *что при всех* $n \geqslant n_1$ *будут иметь место неравенства*

$$\left| \varphi_1(P) - \frac{f_n(P)}{\| f_n \|} \right| \leqslant c_1 \left| \frac{\lambda_1}{\lambda_2} \right|^n, \qquad |\lambda_1 - \lambda_{(n)}| \leqslant c_2 \left| \frac{\lambda_1}{\lambda_2} \right|^n.$$

Доказательство. Из (3.2) имеем

$$0 < f_n(P) = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{d_i}{\lambda_i^n} \varphi_i(P),\ n \geqslant 1, \tag{3.4}$$

причем ряды (3.4) сходятся в пространстве H, а при $n \geqslant n_0$ они сходятся абсолютно и равномерно относительно точек $P \in G$.

Принимая во внимание (3.4), получим далее

$$\| f_n \|^2 = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{d_i^2}{\lambda_i^{2n}}, \quad n \geqslant 1, \tag{3.5}$$

$$0 < (f_0, f_n) = (f_0, K^n f_0) = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{d_i^2}{\lambda_i^n}, \quad n \geqslant 1. \tag{3.6}$$

Принимая во внимание (2.4), (2.6), (3.1), (3.4) и (3.5), получим с помощью неравенства Буняковского — Шварца при всех $P \in G$ и $n \geqslant n_0$

$$\left| \varphi_1(P) - \frac{f_n(P)}{\| f_n \|} \right| = \left| \varphi_1(P) - \frac{\sum_{i=1}^{\infty} \frac{\alpha_i}{\lambda_i^n} \varphi_i(P)}{\sqrt{\sum_{i=1}^{\infty} \frac{d_i^2}{\lambda_i^{2n}}}} \right| \leqslant$$

$$\leqslant\left[1-\frac{1}{\sqrt{1+\sum_{i=2}^{\infty}\left(\frac{d_i}{d_1}\right)^2\left(\frac{\lambda_1}{\lambda_i}\right)^{2n}}}\right]\varphi_1(P)+$$

$$+\frac{\sum_{i=2}^{\infty}\left|\frac{d_i}{d_1}\right|\left|\frac{\lambda_1}{\lambda_i}\right|^n|\varphi_i(P)|}{\sqrt{1+\sum_{i=2}^{\infty}\left(\frac{d_i}{d_1}\right)^2\left(\frac{\lambda_1}{\lambda_i}\right)^{2n}}}\leqslant c_3\left[\sqrt{1+\sum_{i=2}^{\infty}\left(\frac{d_i}{d_1}\right)^2\left(\frac{\lambda_1}{\lambda_i}\right)^{2n}}-1\right]+$$

$$+\frac{\lambda_1^n}{d_1|\lambda_2|^{n-n_0}}\sum_{i=2}^{\infty}\frac{|d_i|}{|\lambda_i|^{n_0}}|\varphi_i(P)|\leqslant c_3\left[\sqrt{1+\left(\frac{\lambda_1}{\lambda_2}\right)^{2n}\frac{\|f_0\|^2-d_1^2}{d_1^2}}-1\right]+$$

$$+c_4\left|\frac{\lambda_1}{\lambda_2}\right|^n\left(\sum_{i=2}^{\infty}d_i^2\right)^{1/2}\left[\sum_{i=2}^{\infty}\frac{\varphi_i^2(P)}{\lambda_i^{2n_0}}\right]^{1/2}\leqslant$$

$$\leqslant\left[c_5+c_3\frac{\sqrt{1+c_6\left(\frac{\lambda_1}{\lambda_2}\right)^{2n}}-1}{\left|\frac{\lambda_1}{\lambda_2}\right|^n}\right]\left|\frac{\lambda_1}{\lambda_2}\right|^n\leqslant c_1\left|\frac{\lambda_1}{\lambda_2}\right|^n$$

Это и устанавливает первую из оценок леммы при $n\geqslant n_0$ (буквами c_i; $i=1,2,\ldots,6$ обозначены положительные числа, не зависящие от n).

Для доказательства второй оценки воспользуемся соотношениями (2.4), (2,6), (3.3) и (3.6). Имеем при $n\geqslant 1$

$$|\lambda_1-\lambda_{(n)}|=\left|\lambda_1-\frac{\sum_{i=1}^{\infty}\frac{d_i^2}{\lambda_i^{n-1}}}{\sum_{i=1}^{\infty}\frac{d_i^2}{\lambda_i^n}}\right|=\left|1-\frac{1+\sum_{i=2}^{\infty}\left(\frac{d_i}{d_1}\right)^2\left(\frac{\lambda_1}{\lambda_i}\right)^{n-1}}{1+\sum_{i=2}^{\infty}\left(\frac{d_i}{d_1}\right)^2\left(\frac{\lambda_1}{\lambda_i}\right)^n}\right|\lambda_1\leqslant$$

$$\leqslant\lambda_1\frac{\sum_{i=2}^{\infty}\left(\frac{d_i}{d_1}\right)^2\left|\frac{\lambda_1}{\lambda_i}\right|^{n-1}\left(1-\frac{\lambda_1}{\lambda_i}\right)}{1+\sum_{i=2}^{\infty}\left(\frac{d_i}{d_1}\right)^2\left(\frac{\lambda_1}{\lambda_i}\right)^n}\leqslant\lambda_1\frac{\left(1+\left|\frac{\lambda_1}{\lambda_2}\right|\right)\frac{\|f_0\|^2-d_1^2}{d_1^2}}{1-\sum_{i=2}^{\infty}\left(\frac{d_i}{d_1}\right)^2\left|\frac{\lambda_1}{\lambda_i}\right|}\left|\frac{\lambda_1}{\lambda_2}\right|^{n-1}.$$

Обозначая через n_2 наименьшее целое число, удовлетворяющее неравенству

$$\sum_{i=2}^{\infty}\left(\frac{d_i}{d_1}\right)^2\left|\frac{\lambda_1}{\lambda_i}\right|^{n_2}\leqslant\frac{\|f_0\|^2-d_1^2}{d_1^2}\left|\frac{\lambda_1}{\lambda_2}\right|^{n_2}<\frac{1}{2}, \qquad (3.7)$$

получим вторую оценку леммы при $n\geqslant n_2$. Обозначая через $n_1=\max(n_0,n_2)$, получим все утверждения леммы.

4. Полученные в лемме предыдущего пункта оценки позволяют применить метод последовательных приближений для приближенного вычисления первого характеристического числа λ_1 и соответствующей ему собственной функции φ_1. При этом при безграничном увеличении числа итераций n последовательность $\frac{f_n}{\|f_n\|}$ будет равномерно сходиться к φ_1; последовательность чисел $\lambda_{(n)}$ будет сходиться к λ_1.

Таким образом, задача свелась к вычислению итераций f_n и к вычислению чисел (f_0, f_n). Мы изложим метод Монте Карло, пригодный как для приближенного вычисления последовательности итераций f_n, так и для непосредственного вычисления чисел (f_0, f_n).

В дальнейшем мы будем предполагать, что функция $H(P, P')$ продолжена нулем на все пространство $R_m \times R_m$.

Для всех точек $P \in G$ и для всех направлений ω, $|\omega| = 1$, выходящих из точки P, введем функцию

$$z(P, \omega) = \omega_m \int_0^\infty H(P, P + r_1\omega)\, r_1^{m-1-\alpha}\, dr_1. \tag{4.1}$$

В силу (2.3) имеем при всех $P \in G$ и $\omega, |\omega| = 1$,

$$0 < z(P, \omega) < 1. \tag{4.2}$$

Теперь введем условную плотность вероятностей случайной точки $(P, P') \in R_m \times R_m$ при условии $P = P_0 \in G$ по формуле

$$F_1(P, P') = \frac{H(P, P')}{r^\alpha z\left(P, \dfrac{P' - P}{r}\right)}, \quad r = |P - P'|. \tag{4.3}$$

Соответствующая этой условной плотности вероятностей условная функция распределения в $R_m \times R_m$ определяет вероятность случайной точки P' попасть в окрестность dP_1 точки P_1 при условии $P = P_0 \in G$. Эта вероятность равна в силу (4.3)

$$F_1(P_0, P_1)\, dP_1 = \frac{H(P_0, P_1)}{r_{1,0}^\alpha z\left(P_0, \dfrac{P_1 - P_0}{r_{1,0}}\right)}\, dP_1, \quad r_{1,0} = |P_0 - P_1|.$$

Переходя к сферическим координатам с центром в точке P_0

$$P_1 = P_0 + r_{1,0}\omega, \ |\omega| = 1, \ r_{1,0} = |P_0 - P_1|, \ dP_1 = r_{1,0}^{m-1}\, dr_{1,0}\, d\omega,$$

получим далее

$$F_1(P_0, P_1)\, dP_1 = \frac{H(P_0, P_0 + r_{1,0}\omega)}{z(P_0, \omega)}\, r_{1,0}^{m-1-\alpha}\, dr_{1,0}\, d\omega,$$

или

$$F_1(P_0, P_1)\, dP_1 = \frac{d\omega}{\omega_m}\, d_{r_{1,0}} f_1(P_0, \omega, r_{1,0}), \tag{4.4}$$

где

$$f_1(P, \omega, r) = \omega_m \frac{\displaystyle\int_0^r H(P, P + r_1\omega)\, r_1^{m-1-\alpha}\, dr_1}{z(P, \omega)}.$$

Функция $F_1(P, P')$ обладает свойствами условной плотности вероятностей в $R_m \times R_m$ при условии $P = P_0$. Действительно, в силу (4.1) и (4.4) имеем при $P = P_0 \in G$

$$F_1(P, P') \geqslant 0, \quad \int_{R_m} F_1(P, P')\, dP' = \int_{|\omega|=1} \frac{d\omega}{\omega_m} \int_0^\infty d_r f_1(P, \omega, r) = 1.$$

Построим теперь следующий случайный процесс в области G — случайное блуждание фиктивной частицы. Частица начинает свой путь в точке $P = P_0 \in G$ и с вероятностью $F_1(P_0, P_1)\,dP_1$ попадает в окрестность dP_1 точки P_1. При этом вырабатывается случайная величина

$$Z_1[z, f_0] = z\left(P_0, \frac{P_1 - P_0}{r_{1,0}}\right) f_0(P_1).$$

Далее частица из точки P_1 с вероятностью $F_1(P_1, P_2)\,dP_2$ попадает в окрестность dP_2 точки P_2; при этом вырабатывается случайная величина

$$Z_2[z, f_0] = z\left(P_0, \frac{P_1 - P_0}{r_{1,0}}\right) z\left(P_1, \frac{P_2 - P_1}{r_{2,1}}\right) f_0(P_2).$$

Наконец, если частица достигла точки P_{n-1}, то с вероятностью $F_1(P_{n-1}, P_n)\,dP_n$ она попадает в окрестность dP_n точки P_n, и вырабатывается случайная величина

$$Z_n[z, f_0] = z\left(P_0, \frac{P_1 - P_0}{r_{1,0}}\right) z\left(P_1, \frac{P_2 - P_1}{r_{2,1}}\right) \ldots z\left(P_{n-1}, \frac{P_n - P_{n-1}}{r_{n,n-1}}\right) f_0(P_n). \quad (4.5)$$

Построенный случайный процесс есть простая цепь Маркова: ей соответствует определенное условное распределение вероятностей в $\underbrace{R_m \times R_m \times \ldots \times R_m}_{n+1}$ при условии $P = P_0$. Условная плотность вероятностей случайного пути (при $P = P_0 \in G$) $P = P_0 \to P_1 \to P_2 \to \ldots \to P_n$ в $\underbrace{R_m \times R_m \times \ldots \times R_m}_{n+1}$ есть

$$F_1(P_0, P_1) F_1(P_1, P_2) \ldots F_1(P_{n-1}, P_n).$$

При этом вырабатывается случайная величина $Z_n[z, f_0]$.

Докажем, что

$$f_n(P_0) = \mathbf{E}(Z_n[z, f_0] \mid P = P_0), \quad (4.6)$$

где $\mathbf{E}(Z_n / P = P_0)$ обозначает условное среднее значение случайной величины Z_n при $P = P_0$. По определению условного среднего значения в $\underbrace{R_m \times R_m \times \ldots \times R_m}_{n+1}$ при $P = P_0$ имеем в силу (4.3) и (4.5)

$$\mathbf{E}(Z_n[z, f_0] / P = P_0) =$$

$$= \underbrace{\int_{R_m}\int_{R_m}\ldots\int_{R_m}}_{n} z\left(P_0, \frac{P_1 - P_0}{r_{1,0}}\right) z\left(P_1, \frac{P_2 - P_1}{r_{2,1}}\right) \ldots z\left(P_{n-1}, \frac{P_n - P_{n-1}}{r_{n,n-1}}\right) f_0(P_n) \times$$

$$\times F_1(P_0, P_1) F_1(P_1, P_2) \ldots F_1(P_{n-1}, P_n)\,dP_1 dP_2 \ldots dP_n =$$

$$= \underbrace{\int_{R_m}\int_{R_m}\ldots\int_{R_m}}_{n} \frac{H(P_0, P_1)}{r_{1,0}^{\alpha}} \cdot \frac{H(P_1, P_2)}{r_{2,1}^{\alpha}} \cdots \frac{H(P_{n-1}, P_n)}{r_{n,n-1}^{\alpha}} f_0(P_n)\,dP_1 dP_2 \ldots dP_n =$$

$$= \underbrace{\int_{G}\int_{G}\ldots\int_{G}}_{n} K(P_0, P_1) K(P_1, P_2) \ldots K(P_{n-1}, P_n) f_0(P_n)\,dP_1 dP_2 \ldots dP_n = f_n(P_0).$$

Вероятностная интерпретация (4.6) для $f_n(P_0)$ позволяет вычислять его по методу Монте Карло. Для этого реализуется достаточно большое число N построенных случайных блужданий, начинающихся в точке $P_0 \in G$. Вырабатываемые при этих случайных блужданиях случайные величины $Z_n^{(q)}[z, f_0]$, $q = 1, 2, \ldots, N$ усредняются,

$$f_n(P_0) \simeq \frac{1}{N} \sum_{q=1}^{N} Z_n^{(q)}[z, f_0] = \overline{Z}_n^{(N)}[z, f_0]. \tag{4.7}$$

При реализации случайных блужданий можно использовать таблицу случайных чисел. Из представления вероятности в форме (4.4) видно, что направление ω распределено равномерно, в то время как расстояние $r_{1,0}$ определяется функцией распределения $f_1(P_0, \omega, r_{1,0})$, то-есть $r_{1,0}$ есть корень уравнения

$$f_1(P_0, \omega, r_{1,0}) = \alpha,$$

где α очередное случайное число, $0 \leqslant \alpha \leqslant 1$. Отсюда следует, что $r_{1,0}$ есть корень уравнения

$$\omega_m \int_0^{r_{1,0}} H(P_0, P_0 + r_1\omega) r_1^{m-1-\alpha}\, dr_1 = \alpha z(P_0, \omega). \tag{4.8}$$

По найденным случайным направлению ω, $|\omega| = 1$, и расстоянию $r_{1,0}$ определяется новое случайное положение частицы: она вылетает из точки P_0 и летит в направлении ω расстояние $r_{1,0}$, $P_1 = P_0 + r_{1,0}\omega$, и так далее. Заметим, что для построенного случайного блуждания частица никогда не попадает на границу Γ области G.

5. В этом пункте мы построим другой случайный процесс, который будет использоваться для приближенного вычисления значений f_n методом Монте Карло. При этом случайном процессе блуждающая частица будет иметь конечную вероятность «поглотиться» границей Γ области G).

Как и в пункте 4, введем условную плотность вероятностей случайной точки $(P, P') \in R_m \times R_m$ при условии $P = P_0 \in G$ по формуле

$$F_2(P, P')\, dP' = \frac{d\omega}{\omega_m}\, d_r f_2(P, \omega, r),\ r = |P' - P|,\ \omega = \frac{P' - P}{r}, \tag{5.1}$$

где

$$f_2(P, \omega, r) = \begin{cases} \omega_m \int_0^r H(P, P + r_1\omega) r_1^{m-1-\alpha}\, dr_1, & \text{если } P' = P + r\omega \in G; \\ 1, & \text{если } P' = P + r\omega \bar{\in} G. \end{cases} \tag{5.2}$$

Из (5.1) и (5.2) следует при $(P, P') \in G \times G$

$$F_2(P, P')\, dP' = \frac{H(P, P')}{r^\alpha}\, dP'.$$

Из (5.2), кроме того, следует, что для данных $P = P_0 \in G$ и ω, $|\omega| = 1$, существует такая точка $P_0' = P_0 + r_0\omega$, принадлежащая Γ, что функция $f_2(P_0, \omega, r)$ имеет при $r = r_0$ скачок слева, равный

$$1 - \omega_m \int_0^{r_0} H(P_0, P_0 + r_1\omega) r_1^{m-1-\alpha}\, dr_1 = 1 - z(P_0, \omega).$$

Величина $1 - z(P_0, \omega)$ есть вероятность «поглощения» границей Γ частицы, начинающей свой путь в точке $P_0 \in G$ в направлении ω. Легко проверяется, что функция $F_2(P, P')$ обладает свойствами условной плотности вероятностей в $R_m \times R_m$ при $P = P_0 \in G$,

$$F_2(P, P') \geqslant 0, \quad \int\limits_{R_m} F_2(P, P')\, dP' = \int\limits_{|\omega|=1} \frac{d\omega}{\omega_m} \int\limits_0^\infty d_r f_2(P, \omega, r) = 1.$$

Как и в предыдущем пункте, построим случайное блуждание, начинающееся в точке $P = P_0 \in G$, $P = P_0 \to P_1 \to P_2 \to \ldots \to P_n$, с использованием плотности вероятностей $F_2(P, P')$.

Случайное блуждание частицы прекращается как только она «поглотится» границей Γ. Введем случайную величину

$$Z_n[\delta, f_0] = \delta(P_1)\,\delta(P_2) \ldots \delta(P_n)\, f_0(P_n), \tag{5.3}$$

где

$$\delta(P) = \begin{cases} 1, & \text{если } P \in G \\ 0, & \text{если } P \bar{\in} G \end{cases} \tag{5.4}$$

(Если поглощение частицы произошло в точке P_k, $k < n$, то $P_k = P_{k+1} = \ldots = P_n$, так как при всех $P' \in R_m$ $H(P_k, P') = 0$). Покажем, что

$$f_n(P_0) = \mathbf{E}(Z_n[\delta, f_0] \mid P = P_0). \tag{5.5}$$

Рассуждая как и в предыдущем пункте, получим на основании (5.1), (5.3) и (5.4)

$$\mathbf{E}(Z_n[\delta, f_0] \mid P = P_0) = \underbrace{\int\limits_{R_m} \int\limits_{R_m} \ldots \int\limits_{R_m}}_{n} \delta(P_1)\,\delta(P_2) \ldots \delta(P_n)\, f_0(P_n)\, F_2(P_0, P_1) \times$$

$$\times F_2(P_1, P_2) \ldots F_2(P_{n-1}, P_n)\, dP_1 dP_2 \ldots dP_n =$$

$$= \underbrace{\int\limits_G \int\limits_G \ldots \int\limits_G}_{n} F_2(P_0, P_1) F_2(P_1, P_2) \ldots F_2(P_{n-1}, P_n)\, f_0(P_n)\, dP_1 dP_2 \ldots dP_n =$$

$$= \underbrace{\int\limits_G \int\limits_G \ldots \int\limits_G}_{n} K(P_0, P_1)\, K(P_1, P_2) \ldots K(P_{n-1}, P_n)\, f_0(P_n)\, dP_1 dP_2 \ldots dP_n = f_n(P_0).$$

Построенные в пунктах 4 и 5 случайные процессы являются обобщением соответствующих случайных процессов, построенных для решения систем линейных алгебраических уравнений (например, J. H. Curtiss [2]).

Формула (5.5) дает возможность применить метод Монте Карло для приближенного определения $f_n(P_0)$; при этом случайное блуждание строится согласно функции распределения (5.1)—(5.2). Получим аналогично (4.7)

$$f_n(P_0) \simeq \frac{1}{N} \sum_{q=1}^{N} Z_n^{(q)}[\delta, f_0] = \bar{Z}_n^{(N)}[\delta, f_0]\,. \tag{5.6}$$

6. Коль скоро приближенные значения для f_n вычислены для ряда точек $P_0 \in G$, вычисление чисел (f_0, f_n) может быть осуществлено по

какой-либо квадратурной формуле. Далее по формуле (3.3) могут быть определены числа $\lambda_{(n)}$ — приближения к λ_1.

Здесь мы изложим прием для непосредственного приближенного вычисления чисел $(f, f_n) = (f, K^n f_0)$ методом Монте Карло, где $f(P)$ — некоторая непрерывная в G функция.

Введем функцию плотности вероятностей по формуле

$$F_0(P) = \frac{\delta(P)}{v}, \tag{6.1}$$

где функция $\delta(P)$ определяется формулой (5.4). Соответствующая (6.1) функция распределения определяет случайную точку $P \in R_m$ с равномерным по мере законом. Имеем

$$F_0(P) \geqslant 0, \quad P \in R_m; \quad \int\limits_{R_m} F_0(P)\, dP = 1.$$

Случайные блуждания пунктов 4 и 5 начнем не с фиксированной точки $P = P_0 \in G$, а со случайной точки P_0, для которой функция плотности вероятностей определяется согласно (6.1). По построению всегда $P_0 \in G$. При этом получится цепь Маркова с начальным распределением, определяемым (6.1): ей соответствует определенное распределение вероятностей в $\underbrace{R_m \times R_m \times \ldots \times R_m}_{n+1}$. Соответствующие плотности вероятностей случайного пути в $\underbrace{R_m \times R_m \times \ldots \times R_n}_{n+1}$. $P_0 \to P_1 \to \ldots \to P_n$, равны в силу (6.1)

$$F_0(P_0) F_i(P_0, P_1) F_i(P_1, P_2) \ldots F_i(P_{n-1}, P_n), \quad i = 1, 2. \tag{6.2}$$

Введем случайные величины, соответствующие случайным величинам (4.5) и (5.3)

$$Z_n[z, f_0, f] = z\left(P_0, \frac{P_1 - P_0}{r_{1,0}}\right) z\left(P_1, \frac{P_2 - P_1}{r_{2,1}}\right) \ldots z\left(P_{n-1} \frac{P_n - P_{n-1}}{r_{n,n-1}}\right) \times$$
$$\times f_0(P_n) f(P_0), \tag{6.3}$$

$$Z_n[\delta, f_0, f] = \delta(P_1)\delta(P_2) \ldots \delta(P_n) f_0(P_n) f(P_0). \tag{6.4}$$

Из (6.2)—(6.4) следует

$$(f, f_n) = v\, \mathbf{E}\,(Z_n[v, f_0, f]), \tag{6.5}$$

$$(f, f_n) = v\, \mathbf{E}\,(Z_n[\delta, f_0, f]). \tag{6.6}$$

Формулы (6.5) и (6.6) дают возможность вычислять числа (f, f_n) методом Монте Карло,

$$(f, f_n) \simeq \frac{v}{N} \sum_{q=1}^{N} Z_n^{(q)}[z, f_0, f] = v \overline{Z}_n^{(N)}[z, f_0, f] \tag{6.7}$$

$$(f, f_n) \simeq \frac{v}{N} \sum_{q=1}^{N} Z_n^{(q)}[\delta, f_0, f] = v\, \overline{Z}_n^{(N)}[\delta, f_0, f]. \tag{6.8}$$

Из построений случайных блужданий пунктов 4 и 5 видно, что для осуществления реализации случайного блуждания с плотностью $F_2(P, P')$ требуется меньше вычислений, чем для осуществления реализации случайного блуждания с плотностью $F_1(P, P')$.

7. Теперь мы будем считать, что в качестве нулевого приближения выбрана функция $f_0(P) \equiv 1$; n-ю итерацию 1 будем обозначать через $1_n = K^n 1$.

Докажем для дисперсий соответствующих случайных величин неравенства

$$\mathbf{D}(Z_n[z, 1, 1]) < \mathbf{D}(Z_n[\delta, 1, 1]), \tag{7.1}$$

$$\mathbf{D}(Z_n[z, 1] \mid P = P_0) < \mathbf{D}(Z_n[\delta, 1] \mid P = P_0). \tag{7.2}$$

Как известно (J. H. Curtiss [2]), неравенства (7.1) или (7.2) ведут к требованию большего числа N реализаций случайного блуждания с $F_2(P, P')$ по сравнению с числом реализаций случайного блуждания с $F_1(P, P')$ для получения $(1, 1_n)$ или значения в точке 1_n с заданной степенью точности.

Докажем неравенство (7.1). В силу (6.4) случайная величина $Z_n[\delta, 1,1]$ принимает два значения: 0 или 1. Следовательно, все ее моменты равны между собой

$$\mathbf{E}(Z_n^r[\delta, 1,1]) = \mathbf{E}(Z_n[\delta, 1,1]) = \frac{(1,1_n)}{v}, \quad r \geqslant 1. \tag{7.3}$$

Из (7.3) следует, в частности, что

$$\mathbf{D}(Z_n[\delta, 1,1]) = \mathbf{E}(Z_n^2[\delta, 1,1]) - \mathbf{E}^2(Z_n[\delta, 1,1]) = \frac{(1,1_n)}{v}\left[1 - \frac{(1,1_n)}{v}\right]. \tag{7.4}$$

Принимая во внимание (4.2), (6.2), (6.3) и (6.5), получим

$$\mathbf{D}(Z_n[z, 1,1]) = \mathbf{E}(Z_n^2[z, 1,1]) - \mathbf{E}^2(Z_n[z, 1,1]) =$$

$$= \underbrace{\int_{R_m}\int_{R_m}\cdots\int_{R_m}}_{n+1} z^2\left(P_0, \frac{P_1 - P_0}{r_{1,0}}\right) z^2\left(P_1, \frac{P_2 - P_1}{r_{2,1}}\right)\cdots z^2\left(P_{n-1}, \frac{P_n - P_{n-1}}{r_{n,n-1}}\right) \times$$

$$\times \frac{\delta(P_0)}{v} F_1(P_0, P_1) F_1(P_1, P_2)\cdots F_1(P_{n-1}, P_n)\, dP_0 dP_1 dP_2 \cdots dP_n - \frac{(1,1_n)^2}{v^2} <$$

$$< \underbrace{\int_{R_m}\int_{R_m}\cdots\int_{R_m}}_{n+1} z\left(P_0, \frac{P_1 - P_0}{r_{1,0}}\right) z\left(P_1, \frac{P_2 - P_1}{r_{2,1}}\right)\cdots z\left(P_{n-1}, \frac{P_n - P_{n-1}}{r_{n,n-1}}\right) \times$$

$$\times \frac{\delta(P_0)}{v} F_1(P_0, P_1) F_1(P_1, P_2)\cdots F_1(P_{n-1}, P_n)\, dP_0 dP_1 dP_2 \cdots dP_n - \frac{(1,1_n)^2}{v^2} =$$

$$= \frac{(1,1_n)}{v}\left[1 - \frac{(1,1_n)}{v}\right]. \tag{7.5}$$

Неравенство (7.1) сразу следует из (7.4) и (7.5). Аналогично устанавливается и неравенство (7.2).

Установим необходимые для дальнейшего оценки для величины $(1, 1_n)$ в зависимости от n: найдется также число $\beta > 0$, что при всех $n \geqslant n_1$ (n_1 то же, что и в лемме пункта 3) имеют место неравенства

$$\frac{\lambda_1^{-n}}{\beta^2 v} \leqslant (1,1_n) \leqslant v\lambda_1^{-n}. \tag{7.6}$$

Первое неравенство при всех $n \geqslant 1$ сразу следует из (3.6), если принять во внимание неравенства (2.4) и (3.1), где $\| 1 \|^2 = r$. Докажем левое неравенство в (7.6). Имеем из (2.4), (3.1) и (3.6)

$$(1,1_n) \geqslant \lambda_1^{-n} d_1^2 \left[1 - \sum_{i=2}^{\infty} \left(\frac{d_i}{d_1}\right)^2 \left|\frac{\lambda_1}{\lambda_i}\right|^n\right] \geqslant \lambda_1^{-n} d_1^2 \left[1 - \frac{\| 1 \|^2 - d_1^2}{d_1^2} \left|\frac{\lambda_1}{\lambda_2}\right|^n\right].$$

Полагая n_2 таким, как и в (3.7), и обозначая $\beta = \frac{\sqrt{2v}}{d_1^2}$, убедимся в справедливости неравенств (7.6) при $n \geqslant n_1 \geqslant n_2$.

8. В этом пункте мы ограничимся оценками статистических погрешностей, возникающих при применении методов Монте Карло для приближенного вычисления величины λ_1. Сначала остановимся на оценках статистических погрешностей, имеющих место при определении чисел $(1,1_n)$ методом Монте Карло согласно формуле (6.6).

Из (7.6) следует, что величина $(1,1_n) \to 0$ при $n \to \infty$. Поэтому естественно производить оценку не абсолютной, а относительной статистической погрешности $\varepsilon_n^{(N)}$,

$$\varepsilon_n^{(N)} = \frac{\left| (1,1_n) - v\overline{Z}_n^{(N)} [\delta, 1, 1] \right|}{(1,1_n)}, \tag{8.1}$$

где $\overline{Z}_n^{(N)} [\delta, 1,1]$ определяется формулой (6.8) при $f_0 = f = 1$.

По построению пункта 6 при каждом $n \geqslant 1$ независимые случайные величины $Z_n^{(q)} [\delta, 1, 1]$, $q = 1 = 1,2, \ldots, N$, принимающие значения 1 или 0, имеют одинаковые функции распределения вероятностей, одинаковые средние значения, равные $\frac{(1,1_n)}{v}$, одинаковые стандартные отклонения σ_n,

$$\sigma_n = \sqrt{\frac{(1,1_n)}{v}\left[1 - \frac{(1,1_n)}{v}\right]}, \tag{8.2}$$

и одинаковые третьи моменты, равные $\frac{(1,1_n)}{v}$. Поэтому по теореме Ляпунова для схемы Бернулли (Г. Крамер [11], гл. VII) имеют место равномерные относительно a оценки при $N > 1$

$$\left| \mathbf{P}\left\{ \left| \frac{(1,1_n)}{v} - \overline{Z}_n^{(N)} [\delta, 1,1] \right| \leqslant a\sigma_n N^{-\frac{1}{2}} \right\} - 1 + \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_a^{\infty} e^{-\frac{t^2}{2}} dt \right| <$$

$$< \frac{3}{\sigma_n} \ln N \cdot N^{-\frac{1}{2}}.$$

Полагая здесь $a = \ln N$, получим при $N > 1$ и $n \geqslant 1$

$$\mathbf{P}\left\{ \left| \frac{(1,1_n)}{v} - \overline{Z}_n^{(N)} [\delta, 1,1] \right| \leqslant \sigma_n \ln N \cdot N^{-\frac{1}{2}} \right\} > 1 -$$

$$- \frac{3}{\sigma_n} N^{-\frac{1}{2}} \ln N - \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_{\ln N}^{\infty} e^{-\frac{t^2}{2}} dt. \tag{8.3}$$

Учитывая неравенство при $N \geqslant 3$

$$\sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_{\ln N}^{\infty} e^{-\frac{t^2}{2}}\, dt \leqslant \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{e^{-\frac{1}{2}\ln^2 N}}{\ln N} < \ln N \cdot N^{-\frac{1}{2}}$$

и принимая во внимание (8.1) и (8.2), получим из (8.3) при $N > 2$ и $n \geqslant 1$.

$$\mathbf{P}\left\{\varepsilon_n^{(N)} \leqslant \sqrt{\frac{v}{(1,1_n)} - 1}\, \ln N \cdot N^{-\frac{1}{2}}\right\} > 1 - \left\{\frac{3}{\sqrt{\frac{(1,1_n)}{v}\left[1 - \frac{(1,1_n)}{v}\right]}} + 1\right\} \ln N \cdot N^{-\frac{1}{2}}$$

и, тем более,

$$\mathbf{P}\left\{\varepsilon_n^{(N)} < \sqrt{\frac{v}{(1,1_n)}}\, \ln N \cdot N^{-\frac{1}{2}}\right\} > 1 - \left\{\frac{3}{\sqrt{\frac{(1,1_n)}{v}\left[1 - \frac{(1,1_n)}{v}\right]}} + 1\right\} \ln N \cdot N^{-\frac{1}{2}}.$$

В силу (7.6) имеем далее при $n \geqslant n_1$ и $N > 2$

$$\mathbf{P}\left\{\varepsilon_n^{(N)} < \beta \lambda_1^{\frac{n}{2}} \ln N \cdot N^{-\frac{1}{2}}\right\} > 1 - \left(\frac{3\beta\lambda_1^{\frac{n}{2}}}{\sqrt{1 - \lambda_1^{-n}}} + 1\right) \ln N \cdot N^{-\frac{1}{2}} >$$

$$> 1 - \left(\frac{3\beta\lambda_1^{\frac{n+1}{2}}}{\sqrt{\lambda_1 - 1}} + 1\right) \ln N \cdot N^{-\frac{1}{2}} = 1 - p_n^{(N)}. \qquad (8.4)$$

Оценки (8.4) дают возможность оценить статистическую погрешность, возникающую при определении λ_1, изложенным выше методом Монте Карло при стремлении N и n к бесконечности определенным образом. При этом удается найти порядок величин $N(\eta)$ и $n(\eta)$, необходимых для достижения заданной точности η в λ_1.

Приближенными значениями для λ_1 мы назовем числа

$$\lambda_n^{(N)} = \frac{\overline{Z}_{n-1}^{(N)}[\delta, 1,1]}{\overline{Z}_n^{(N)}[\delta, 1,1]}. \qquad (8.5)$$

Принимая во внимание (3.3), (8.1) и (8.5), получим на основании леммы пункта 3 при $n \geqslant n_1$

$$|\lambda_1 - \lambda_n^{(N)}| \leqslant |\lambda_1 - \lambda_{(n)}| + |\lambda_{(n)} - \lambda_n^{(N)}| \leqslant c_2 \left|\frac{\lambda_1}{\lambda_2}\right|^n + \left|\frac{(1,1_{n-1})}{(1,1_n)} - \frac{v\overline{Z}_{n-1}^{(N)}[\delta, 1,1]}{(1,1_n)}\right| +$$

$$+ \left|\frac{v\overline{Z}_{n-1}^{(N)}[\delta, 1,1]}{(1,1_n)} - \frac{\overline{Z}_{n-1}^{(N)}[\delta, 1,1]}{\overline{Z}_n^{(N)}[\delta, 1,1]}\right| = c_2 \left|\frac{\lambda_1}{\lambda_2}\right|^n + \varepsilon_{n-1}^{(N)} \lambda_{(n)} + \varepsilon_n^{(N)} \lambda_n^{(N)} \leqslant$$

$$\leqslant c_2 \left|\frac{\lambda_1}{\lambda_2}\right|^n + \varepsilon_{n-1}^{(N)} \lambda_{(n)} + \varepsilon_n^{(N)} \lambda_1 + \varepsilon_n^{(N)} |\lambda_1 - \lambda_n^{(N)}|. \qquad (8.6)$$

Подчиним теперь N условию при всех $n \geqslant n_1$

$$\beta \lambda_1^{\frac{n}{2}} \ln N \cdot N^{-\frac{1}{2}} < \frac{1}{2}. \qquad (8.7)$$

В силу (8.4) при таких N с вероятностью большей $1 - p_n^{(N)}$ будет выполнено неравенство $\varepsilon_n^{(N)} < \frac{1}{2}$. Принимая это во внимание, получим

из (8.6) при n и N, удовлетворяющих условиям (8.7),

$$|\lambda_1 - \lambda_n^{(N)}| < c_7 \left|\frac{\lambda_1}{\lambda_2}\right|^n + c_8 \varepsilon_n^{(N)} + c_9 \varepsilon_{n-1}^{(N)} \tag{8.8}$$

с вероятностью большей $1 - p_n^{(N)}$. (Через c_i мы обозначаем положительные числа, не зависящие от n и N.) Учитывая (8.4), получим из (8.8)

$$|\lambda_1 - \lambda_n^{(N)}| < c_7 \left|\frac{\lambda_1}{\lambda_2}\right|^n + c_{10} \lambda_1^{\frac{n}{2}} N^{-\frac{1}{2}} \ln N \tag{8.9}$$

с вероятностью большей $1 - p_n^{(N)}$ при условиях (8.7).

Выберем теперь зависимость $N(n)$ при $n \geqslant n_1$ такую, чтобы было выполнено условие: второе слагаемое в правой части (8.9) должно быть такого же порядка малости, как и первое слагаемое;

$$\left|\frac{\lambda_1}{\lambda_2}\right|^n = c_{11} \lambda_1^{\frac{n}{2}} N^{-\frac{1}{2}} \ln N. \tag{8.10}$$

Из условия (8.10) будет следовать условие (8.7), возможно, только при $n \geqslant n_3 \geqslant n_1$.

Из условия (8.10) получим порядок величины $N(n)$ для числа испытаний при данном $n \geqslant n_3$

$$N = c_{12} \left|\frac{\lambda_2}{\sqrt{\lambda_1}}\right|^{\frac{2n}{1-\varepsilon}}, \tag{8.11}$$

где $0 < \varepsilon < 1$, а в остальном любое. При этом, в силу (8.9) и (8.10), имеем неравенство

$$|\lambda_1 - \lambda_n^{(N)}| < c_{13} \left|\frac{\lambda_1}{\lambda_2}\right|^n \tag{8.12}$$

с вероятностью, отличающейся от 1 на величину, не превосходящую, на основании (8.4),

$$p_n^{(N)} < c_{14} \left|\frac{\lambda_1}{\lambda_2}\right|^n. \tag{8.13}$$

Наконец, сформулируем оценки (8.11) — (8.13) в терминах числа испытаний N. Это даст при $n \geqslant n_3$

$$|\lambda_1 - \lambda_n^{(N)}| < c_{15} N^{-\delta}, \quad \delta = \frac{1-\varepsilon}{2 + \dfrac{\ln \lambda_1}{\ln \left|\dfrac{\lambda_2}{\lambda_1}\right|}}, \quad n = \frac{(1-\varepsilon) \ln N}{2 \ln |\lambda_2| - \ln \lambda_1} - c_{16}, \tag{8.14}$$

причем (8.14) имеют место с вероятностью, отличающейся от 1 на величину порядка $N^{-\delta}$.

Формулы (8.14) решают задачу определения порядка величин $N(\eta)$ и $n(\eta)$, необходимых для достижения заданной точности η в λ_1,

$$N(\eta) = c_{17} \eta^{-\frac{1}{\delta}}, \quad n(\eta) = \frac{1}{\ln \left|\dfrac{\lambda_2}{\lambda_1}\right|} \ln \frac{1}{\eta} + c_{18}, \quad \frac{1}{\delta} = \frac{2 + \dfrac{\ln \lambda_1}{\ln \left|\dfrac{\lambda_2}{\lambda_1}\right|}}{1-\varepsilon}.$$

Полученная в (8.15) оценка для числа испытаний $N(\eta)$, необходимых для того, чтобы погрешность в λ_1 не превосходила η, отличается с точностью до ε от оценки J. H. Curtiss [2], $N(\eta) \sim \eta^{-2}$, в порядке на величину $\dfrac{\ln \lambda_1}{\ln \left| \dfrac{\lambda_2}{\lambda_1} \right|}$.

9. Применим метод Монте Карло для приближенного определения первого характеристического числа λ_1 одномерного интегрального уравнения

$$\varphi(x) = \frac{\lambda}{2} \int_{-1}^{1} e^{-|x-y|} \varphi(y)\, dy = \lambda K \varphi. \tag{9.1}$$

Здесь

$$m = 1, \quad \omega_m = 2, \quad \alpha = 0, \quad H(x, y) = \frac{1}{2} e^{-|x-y|}. \tag{9.2}$$

Уравнение (9.1) эквивалентно следующей граничной задаче:

$$-\varphi''(x) + \varphi(x) = \lambda \varphi(x), \quad \varphi'(0) = 0, \quad \varphi'(1) + \varphi(1) = 0.$$

Собственные функции суть $\varphi_i(x) = \cos \sqrt{\lambda_i - 1}\, x$; $i = 1, 2, \ldots$, а характеристические числа определяются трансцендентным уравнением

$$\sqrt{\lambda_i - \lambda}\, \operatorname{tg} \sqrt{\lambda_i - 1} = 1, \quad i = 1, 2, \ldots$$

Это дает $\lambda_1 \simeq 1{,}740$.

Полагая $f_0 = 1$, получим из (9.1)

$$K \cdot 1 = f_1(x) = \frac{1}{2} \int_{-1}^{1} e^{-|x-y|}\, dy = 1 - \frac{1}{2} e^{-(1-x)} - \frac{1}{2} e^{-(1+x)}.$$

Отсюда получим

$$(1, K1) = \int_{-1}^{1} \left[1 - \frac{1}{2} e^{-(1-x)} - \frac{1}{2} e^{-(1+x)} \right] dx = 1 + e^{-2}.$$

Это дает

$$\lambda_{(1)} = \frac{(1,1)}{(1, K1)} = \frac{2}{1 + e^{-2}} \simeq 1{,}760.$$

Далее имеем

$$(1, K^2 1) = \frac{1}{2} \int_{-1}^{1} \int_{-1}^{1} e^{-|x-y|} \left[1 - \frac{1}{2} e^{-(1-y)} - \frac{1}{2} e^{-(1+y)} \right] dx\, dy =$$

$$= \frac{1}{4} + 3e^{-2} - \frac{1}{4} e^{-4}.$$

Откуда получаем

$$\lambda_{(2)} = \frac{(1, K1)}{(1, K^2 1)} = \frac{1 + e^{-2}}{\dfrac{1}{4} + 3e^{-2} - \dfrac{1}{4} e^{-4}} \simeq 1{,}742.$$

Было проведено вычисление $\lambda_{(1)}$ и $\lambda_{(2)}$ по методу Монте Карло (пункты 4 и 6) при $N = 50$, 50 и 100 случайных блужданий.

В этом одномерном случае имеем всего два (дискретных) направления ω: в сторону возрастания x — положительное $(+1)$ и в сторону убывания x — отрицательное (-1).

Схема построения случайного блуждания, согласно изложенному в пунктах 4 и 6, в этом случае принимает вид: из таблицы случайных чисел выбирается случайное число α_0, $0 \leqslant \alpha_0 \leqslant 1$. Это случайное число будет определять начало случайного блуждания частицы: $x_0 = \alpha_0$. (Ввиду симметрии уравнения (9.2) относительно начала координат, мы будем считать, что частица занимает положение с положительной координатой x.) Если следующее за α_0 (однозначное) случайное число α_1 четное, то будем считать, что движение частицы происходит в положительном направлении; если же соответствующее число — нечетное, то будем считать, что частица пойдет в отрицательном направлении. В первом случае имеем, согласно (4.1) и (9.2),

$$z(x_0, +1) = \int_0^{1-x_0} e^{-y}\, dy = 1 - e^{-(1-x_0)}.$$

Во втором случае получим соответственно

$$z(x_0, -1) = \int_0^{1+x_0} e^{-y}\, dy = 1 - e^{-(1+x_0)}.$$

С помощью полученных значений $z(x_0, \varepsilon)$, $\varepsilon = \pm 1$, по формуле (4.8) определяется расстояние $r_{1,0}$,

$$r_{1,0} = \ln [1 - \alpha_2 z(x_0, \varepsilon)],$$

где α_2 — очередное случайное число. Новое положение частицы x_1 определяется как $x_1 = |x_0 + \varepsilon \cdot r_{1,0}|$. Повторяя изложенный процесс, начинающийся в точке x_1, получим одну из величин $z(x_1, \varepsilon')$, $\varepsilon' = \pm 1$.

Повторяя изложенный процесс N раз, получим значения $Z_1^{(q)}[z, 1,1]$ и $Z_2^{(q)}[z, 1,1]$ случайных величин $Z_1[z, 1,1]$ и $Z_2[z, 1,1]$:

$$Z_1^{(q)}[z, 1,1] = z(x_0^{(q)}, \varepsilon_q),\ Z_2^{(q)}[z, 1,1] = z(x_0^{(q)}, \varepsilon_q)\, z(x_1^{(q)}, \varepsilon_q'),$$

где ε_q и ε_q' принимают значения ± 1.

Согласно (6.7) и (8.5) получим

$$\lambda_2^{(N)} = \frac{N}{\sum\limits_{q=1}^{N} Z_1^{(q)}[z, 1,1]},\quad \lambda_2^{(N)} = \frac{\sum\limits_{q=1}^{N} Z_1^{(q)}[z, 1,1]}{\sum\limits_{q=1}^{N} Z_2^{(q)}[z, 1,1]}.$$

В результате вычислений получены следующие численные значения:

$$\lambda_1^{(50)} = 1{,}717,\quad \lambda_1^{(50)} = 1{,}740,\quad \lambda_1^{(100)} = 1{,}732$$

$$\lambda_2^{(50)} = 1{,}675,\quad \lambda_2^{(50)} = 1{,}868,\quad \lambda_2^{(100)} = 1{,}765,$$

что в сравнении с точными значениями $\lambda_1 = 1{,}760$ и $\lambda_2 = 1{,}742$ дает погрешность при $N = 100$ не более 2%. При вычислениях использовалась первая страница из таблицы случайных чисел L. H. C. Tippett [2].

Выражаю глубокую благодарность Н. Н. Боголюбову за ряд ценных советов при выполнении данной работы.

Поступила в редакцию
17.2.56

ЛИТЕРАТУРА

[1] S. Ulam, The Annals of the Computation Laboratory of Havard University, **XXVI** (1951), 207—212.
[2] J. H. Curtiss, J. Math. and Phys., **XXXII** (1954), 209—232.
[3] L. H. C. Tippett, Random sampling numbers, Tracts for computers, **XV** (1927), London.
[4] J. Todd, J. Washington Acad. Sci., **44** (1954), 377—381.
[5] G. E. Forsythe, R. A. Leibler, MTAC, **IV** (1950), 127—129.
[6] W. R. Wasow, MTAC, **VI** (1952), 78—81.
[7] R. E. Cutkosky, J. Res. NBS, **47** (1951), 113—115.
[8] Р. Курант, К. Фридрихс и Г. Леви, УМН, вып. VIII (1940), 125—160.
[9] М. Г. Крейн и М. А. Рутман, УМН, III, в. 1 (23) (1948), 3—95.
[10] O. D. Kelogg, Math. Ann., B. 86 (1922), H. 1/2.
[11] Г. Крамер, «Случайные величины и распределения вероятностей», ГИИЛ, 1947

ON THE APPLICATION OF THE MONTE CARLO METHODS FOR OBTAINING THE LOWER CHARACTERISTICS NUMBER AND THE CORRESPONDING EIGENFUNCTION FOR A LINEAR INTEGRAL EQUATION

V. S. VLADIMIROV (MOSCOW)

(Summary)

Two types of the random walks of a particle on $\underbrace{R_m \times R_m \times \ldots R_m}_{n+1}$,

$$P_0 \to P_1 \to P_2 \to \cdots \to P_n,$$

were constructed for the m-dimensional linear integral equation

$$\varphi(P) = \lambda \int_G K(P, P')\, \varphi(P')\, dP'$$

as follows: from point P_{k-1} the particle travels to random point $P' = P_k$ in accordance with the probability density $F_1(P_{k-1}, P')$ (resp. $F_2(P_{k-1}, P')$) determined by the formula (4.4) (resp.(5.1)). The random variables $Z_k[z, f_0]$ and $Z_k[z, f_0, f]$ are defined by a random walk with density F_1, while the random variables $Z_k[\delta, f_0]$ and $Z_k[\delta, f_0, f]$ are defined by a random walk with density F_2, $k = 1, 2, \ldots, n$. (see formulas (4.5), (6.3) and (5.3), (6.4)). Since the starting point P_0 is fixed, the conditional mean values of the random variables $Z_k[z, f_0]$ and $Z_k[\delta, f_0]$ are equal to the magnitude of the k-th iteration of the function f_0 at the point P_0, $f_k(P_0)$. When the starting point P_0 is random with uniform measure distribution, the mean values of the random variables $Z_k[z, f_0, f]$ and $Z_k[\delta, f_0, f]$ are equal to $\frac{(f, f_k)}{v}$, where v is the measure of G.

These results permit to use the Monte Carlo method to be applied for approximate computation of the magnitudes $f_k(P_0)$ and (f, f_k). These magnitudes are used later for estimating the first eigenfunction and the first eigenvalue for an integral equation with the symmetrical kernel.

The following result was proved: the statistical error of the first eigenvalue does not surpass $c_1 N^{-\delta}$, where

$$\delta = \frac{(1-\varepsilon)\ln\left|\frac{\lambda_2}{\lambda_1}\right|}{2\ln|\lambda_2| - \ln\lambda_1},$$

with a probability more than $1 - c_2 N^{-\delta}$. The number of iterations n has to be equal to

$$n = \frac{(1-\varepsilon)\ln N}{2\ln|\lambda_2| - \ln\lambda_1} + c_3.$$

Here N is the number of realizations of a random walk; ε is any number in the interval (0,1); λ_1 and λ_2 are the eigenvalues for the integral equation; c_1, c_2 and c_3 are constants independent of n and N.

At the end of the paper a numerical example is given to illustrate the accuracy of the Monte Carlo mehod in obtaining λ_1 using the probability density F_1.

ТЕОРИЯ ВЕРОЯТНОСТЕЙ
И ЕЕ ПРИМЕНЕНИЯ
1956
Том I Выпуск 1

АСИМПТОТИЧЕСКОЕ РАСПРЕДЕЛЕНИЕ КРИТЕРИЯ χ^2 ПРИ ОДНОВРЕМЕННОМ ВОЗРАСТАНИИ ОБЪЕМА НАБЛЮДЕНИЙ И ЧИСЛА ГРУПП

С. Х. ТУМАНЯН

§ 1. Постановка задачи и формулировка основных результатов

Пусть производится n независимых наблюдений случайной величины ξ и H_0 — гипотеза, состоящая в том, что наши данные образуют случайную выборку из генеральной совокупности с функцией распределения $G(x)$, которая полностью определена, т. е. не содержит неизвестных параметров.

Одним из наиболее распространенных методов проверки статистической гипотезы H_0 является критерий χ^2. В этом случае множество E всех возможных значений случайной величины разбивается на $s+1$ непересекающихся подмножеств $E_1, E_2, \ldots, E_{s+1}$ и для оценки расхождения между теоретическим (гипотетическим) и эмпирическим распределениями используется выражение

$$\chi^2 = \sum_{i=1}^{s+1} \frac{n}{p_i}\left(\frac{m_i}{n} - p_i\right)^2, \tag{1.1}$$

где $p_i = \int_{E_i} dG(x)$ $(i = 1, 2, \ldots, s+1)$, а $\frac{m_i}{n}$ — относительные частоты наблюдений, принадлежащие соответствующим подмножествам

$$E_i \,(i = 1, 2, \ldots, s+1).$$

Очевидно, что

$$\sum_{i=1}^{s+1} p_i = 1, \quad \sum_{i=1}^{s+1} m_i = n. \tag{1.2}$$

Введем обозначения:

$$\mathbf{P}(\chi^2 < x) = F(x),$$

$$K_s(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{2^{\frac{s}{2}}\,\Gamma\left(\frac{s}{2}\right)} \displaystyle\int_0^x x^{s-1} e^{-\frac{x}{2}}\, dx, & x \geqslant 0 \\ 0, & x \leqslant 0 \end{cases}$$

$$\Phi(u) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{u} e^{-\frac{x^2}{2}}\, dx.$$

Известно, что

1) если s и p_i постоянны, то при $n \to \infty$ равномерно по x

$$F(x) \to K_s(x);$$

2) если $s \to \infty$, то равномерно по u

$$K_s(s + u\sqrt{2s}) \to \Phi(u). \tag{1.3}$$

Исходя из этих двух фактов на практике, когда n и s бывают достаточно велики, распределение величины (1.1), соответствующим образом нормированной, обычно заменяют нормальным распределением. Однако вышеприведенные факты недостаточны для обоснования подобной замены.

Ввиду этого естественной является следующая постановка задачи:

при каких условиях предельное распределение нормированной величины χ^2 является нормальным, если одновременно увеличивать и n и s (и объем наблюдений и число групп)?

В работе доказывается

Теорема 1. *Если при одновременном безграничном возрастании n и s выполняется соотношение*

$$\min_{1 \leqslant i \leqslant s+1} np_i \to \infty,$$

то равномерно по u

$$F(s + u\sqrt{2s}) \to \Phi(u).$$

Из этой теоремы, как это будет показано, легко следует

Теорема 2. *Как бы ни изменялись одновременно n, s и p_i, при условии*

$$\min_{1 \leqslant i \leqslant s+1} np_i \to \infty$$

равномерно по x имеет место соотношение

$$|F(x) - K_s(x)| \to 0.$$

§ 2. Вспомогательные предложения

1. О моментах биномиального распределения. Пусть производится n независимых испытаний, в каждом из которых некоторое событие A осуществляется с вероятностью p и, следовательно, с вероятностью $q = 1 - p$ не осуществляется. Пусть, далее, m — число осуществлений события A при n испытаниях.

Как известно, математическое ожидание и дисперсия m имеют значения

$$\mathbf{M}m = np, \tag{2.1}$$

$$\mathbf{D}m = \mu_2 = npq. \tag{2.2}$$

Чтобы определить центральные моменты $\mu_r = \mathbf{M}(m - np)^r$ при $r > 2$ можно использовать соотношение:

$$\sum_{r=0}^{\infty} \mu_r \frac{t^r}{r!} = \left[\sum_{r=0}^{\infty} (pq^r + q(-p)^r) \frac{t^r}{r!}\right]^n$$

(см., напр., [2], стр. 219).

Сравнивая в этом соотношении коэффициенты при одинаковых степенях t, можно получить моменты любого порядка.

В дальнейшем нам нужны будут некоторые данные относительно мо

ментов μ_4, μ_6 и μ_8. Мы выпишем здесь точные значения этих моментов:

$$\mu_4 = 3n^2p^2q^2 + npq(1 - 6pq), \tag{2.3}$$

$$\mu_6 = 15n^3p^3q^3 + 5n^2p^2q^2(5 - 26pq) + npq(1 - 30pq + 120p^2q^2), \tag{2.4}$$

$$\mu_8 = 105n^4p^4q^4 + 70n^3p^3q^3(7 - 34pq) + 7n^2p^2q^2(17 - 308pq + 1044p^2q^2) + \\ + npq(1 - 126pq + 1680p^2q^2 - 5040p^3q^3). \tag{2.5}$$

Обозначим

$$\rho = \frac{m}{n} - p. \tag{2.6}$$

Тогда, как легко заметить,

$$\mathbf{M}\rho^k = \frac{\mu_k}{n^k} \quad (k = 1, 2, \ldots). \tag{2.7}$$

Пусть теперь при каждом из n независимых испытаний могут осуществляться события A_1 и A_2 с вероятностями, равными соответственно p_1 и p_2, и, следовательно, с вероятностью $1 - p_1 - p_2$ не осуществляются ни A_1, ни A_2.

Пусть, далее, m_1 и m_2 означают соответственно числа осуществлений событий A_1 и A_2 при n испытаниях. Тогда, как известно,

$$\mathbf{M}(m_1 - np_1)(m_2 - np_2) = -np_1p_2$$

или

$$\mathbf{M}\rho_1\rho_2 = -\frac{p_1p_2}{n}, \tag{2.8}$$

где

$$\rho_i = \frac{m_i}{n} - p_i \quad (i = 1, 2).$$

2. О моментах распределения χ^2. Приведем значения математического ожидания, дисперсии, а также третьего и четвертого центральных моментов величины χ^2, определенной соотношением (1.1), с той только разницей, что разбиение множества значений случайной величины производится не на $s+1$ групп, как у нас, а на s групп:

$$\mathbf{M}\chi^2 = s - 1,$$

$$\mathbf{D}\chi^2 = 2(s-1) + [R_1 - (s^2 + 2s - 2)]n^{-1},$$

$$\nu_3(\chi^2) = 8(s-1) + 2[11R_1 - (9s^2 + 18s - 16)]n^{-1} + \\ + [R_2 - (3s + 22)R_1 + 2(s^3 + 9s^2 + 14s - 12)]n^{-2}, \tag{2.9}$$

$$\nu_4(\chi^2) = 12(s-1)(s+3) + 12[(s-31)R_1 - (s^3 + 25s^2 + 44s - 38)]n^{-1} + \\ + [112R_2 + 3R_1^2 - 2(3s^2 + 118s + 658)R_1 + 3(s^4 + 44s^3 + 328s^2 + \\ + 488s - 380)]n^{-2} + [R_3 - 4(s + 28)R_2 - 3R_1^2 + 4(3s^2 + 56s + 236)R_1 - \\ - 6(s^4 + 20s^3 + 116s^2 + 160s - 120)]n^{-3}, \tag{2.9}$$

где

$$R_1 = \sum_{i=1}^{s} p_i^{-1}, \quad R_2 = \sum_{i=1}^{s} p_i^{-2}, \quad R_3 = \sum_{i=1}^{s} p_i^{-3}.$$

(Значения $\nu_3(\chi^2)$ и $\nu_4(\chi^2)$ заимствованы из работы [3]).

Формулы (2.9) упрощаются в случае, когда $p_i = \frac{1}{s}$ $(i = 1, 2, \ldots, s)$.

Тогда

$$D\chi^2 = 2(s-1)(n-1)n^{-1},$$

$$\nu_3(\chi^2) = 8(s-1) + 4(s-1)(s-8)n^{-1} - 4(s-1)(s-6)n^{-2} = 4(s-1)(n-1)(s+2n-6)n^{-2},$$

$$\nu_4(\chi^2) = 12(s-1)(s+3) + 24(s-1)(3s-19)n^{-1} + 4(s-1)(2s^2-81s+285)n^{-2} - 8(s-1)(s^2-30s+90)n^{-3}.$$

Замечание. Навести на мысль о справедливости теоремы 1, сформулированной в § 1, может следующее обстоятельство. Как нетрудно убедиться согласно приведенным в этом пункте формулам, первые четыре центральных момента величины $\frac{\chi^2-s}{\sqrt{2s}}$ стремятся к соответствующим моментам нормальной функции распределения $\Phi(u)$, если только $np_i \to \infty$ $(i = 1, 2, \ldots, s+1)$ при одновременном безграничном возрастании n и s.

3. В этом пункте мы докажем несколько лемм, необходимых для доказательства основной теоремы, сформулированной в § 1.

Введем обозначения, которыми будем пользоваться в дальнейшем

$$\pi_0 = \min_{1 \leqslant i \leqslant s+1} p_i, \tag{2.10}$$

$$\pi_i = p_1 + p_2 + \ldots + p_i, \quad (i = 1, 2, \ldots, s+1) \tag{2.11}$$

$$\rho_i = \frac{m_i}{n} - p_i \qquad (i = 1, 2, \ldots, s+1) \tag{2.12}$$

Прежде всего заметим, что соотношение (1.1), которое благодаря (2.12) может быть записано в виде

$$\chi^2 = \sum_{i=1}^{s+1} \frac{n}{p_i} \rho_i^2, \tag{2.13}$$

представляет сумму $s+1$ «взвешенных» квадратов величин ρ_i, которые ввиду (1.2) связаны между собой линейной зависимостью, а именно:

$$\sum_{i=1}^{s+1} \rho_i = 0. \tag{2.14}$$

Содержание первой леммы будет состоять в приведении выражения χ^2 линейным преобразованием к сумме квадратов s величин, уже не находящихся в линейной зависимости между собою.

Сформулируем эту лемму:

Лемма 1. *Выражение (2.13) линейным преобразованием величин* ρ_i $(i = 1, 2, \ldots, s+1)$ *приводится к виду:*

$$\chi^2 = \sum_{k=1}^{s} A_k y_k^2, \tag{2.15}$$

где

$$A_k = \frac{n\pi_k\pi_{k+1}}{p_{k+1}}. \tag{2.16}$$

Доказательство. Перейдем в (2.13) от величин ρ_i к величинам y_i посредством следующего линейного преобразования:

$$\rho_i = -\pi_{i-1}y_{i-1} + p_i \sum_{k=i}^{s} y_k \quad (i = 1, 2, \ldots, s), \quad y_0 = 0. \tag{2.17}$$

Следствием соотношений (2.14) и (2.17) будет

$$\rho_{s+1} = -\pi_s y_s. \tag{2.18}$$

Подставляя (2.17) и (2.18) в (2.13), получим:

$$\chi^2 = \sum_{i=1}^{s} \frac{n}{p_i}\Big(-\pi_{i-1}y_{i-1} + p_i \sum_{k=i}^{s} y_k\Big)^2 + \frac{n}{p_{s+1}}\pi_s^2 y_s^2 = \sum_{k=1}^{s} A_k y_k^2 + \sum_{k\neq i} A_{ki} y_k y_i.$$

Сравнивая в левой и правой частях этого равенства коэффициенты при соответствующих степенях неизвестных, найдем, что

$$A_k = \sum_{i=1}^{k} \frac{n}{p_i} p_1^2 + \frac{n}{p_{k+1}}\pi_k^2 = \frac{n\pi_k\pi_{k+1}}{p_{k+1}},$$

$$A_{ki} = \sum_{\substack{j=1 \\ (k<i)}}^{k} 2\frac{n}{p_j} \cdot p_j^2 - \frac{2n}{p_{k+1}} p_{k+1}\pi_k = 0.$$

Лемма доказана.

В дальнейшем нам необходимо будет знать линейное преобразование обратное к преобразованию (2.17) — (2.18), т. е. знать, как выражаются величины y_k через ρ_i.

Результат сформулируем в виде леммы:

Лемма 2. *Справедливо следующее соотношение:*

$$y_k = -\frac{\sum_{i=k+1}^{s+1} \rho_i}{\pi_k} + \frac{\sum_{i=k+2}^{s+1} \rho_i}{\pi_{k+1}} \quad (k = 1, 2, \ldots, s). \tag{2.19}$$

Доказательство. Рассмотрим линейную систему $s+1$ уравнений (2.17) — (2.18) с s неизвестными $y_1, y_2, \ldots, y_s$. Из этих $s+1$ уравнений только s линейно-независимых. В частности, линейно-независимыми являются последние s уравнений. Разрешая по известным формулам эти уравнения относительно $y_k (k = 1, 2, \ldots, s)$, будем иметь:

$$y_k = \frac{\begin{vmatrix} -\pi_1 & p_2 \ldots p_2 & \rho_2 & p_2 \ldots p_2 \\ 0 & -\pi_2 \ldots p_3 & \rho_3 & p_3 \ldots p_3 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 \ldots 0 & -\pi_{k-1} & \rho_k & p_k \ldots p_k \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 \ldots 0 & 0 \ldots 0 & \rho_{s+1} & 0 \ldots -\pi_s \end{vmatrix}}{(-1)^s \pi_1 \pi_2 \ldots \pi_s} \quad (k = 1, 2, \ldots, s).$$

Разлагая детерминант, стоящий в числителе, по элементам k-го столбца, получим

$$y_k = -\frac{\rho_{k+1}}{\pi_k} - \frac{p_{k+1}(\rho_{k+2} + \ldots + \rho_{s+1})}{\pi_k \pi_{k+1}} \quad (k = 1, 2, \ldots, s).$$

Теперь из этих формул сразу следуют формулы (2.19), если учесть, что согласно (2.11) $p_{k+1} = \pi_{k+1} - \pi_k$. Лемма доказана.

Прежде чем формулировать следующую лемму, положим:

$$u_k = A_k y_k^2 - 1 \quad (k = 1, 2, \ldots, s). \tag{2.20}$$

Тогда согласно (2.16) и (2.19)

$$u_k = \frac{n\pi_k\pi_{k+1}}{p_{k+1}} \left(\frac{\sum\limits_{i=k+2}^{s+1} \rho_i}{\pi_{k+1}} - \frac{\sum\limits_{i=k+1}^{s+1} \rho_i}{\pi_k} \right)^2 - 1 \quad (k = 1, 2, \ldots, s). \tag{2.21}$$

Докажем теперь следующую лемму:

Лемма 3.

1) $\mathbf{M} u_k = 0 \quad k = 1, 2, \ldots, s,$ (2.22)

2) $\mathbf{D} u_s = 2 + O\left(\frac{1}{n\pi_0}\right),$ (2.23)

3) $\mathbf{M} u_s^4 = 60 + O\left(\frac{1}{n\pi_0}\right).$ (2.24)

Доказательство. Согласно (2.20)

$$\mathbf{M} u_k = A_k \mathbf{M} y_k^2 - 1. \tag{2.25}$$

Поэтому для вычисления $\mathbf{M} u_k$ необходимо вычислить $\mathbf{M} y_k$.

Согласно (2.19)

$$\mathbf{M} y_k^2 = \mathbf{M} \left(\frac{\sum\limits_{i=k+2}^{s+1} \rho_i}{\pi_{k+1}} - \frac{\sum\limits_{i=k+1}^{s+1} \rho_i}{\pi_k} \right)^2 = \frac{\mathbf{M} \left(\sum\limits_{i=k+2}^{s+1} \rho_i \right)^2}{\pi_{k+1}^2} -$$

$$- \frac{2}{\pi_k\pi_{k+1}} \mathbf{M} \left(\sum_{i=k+2}^{s+1} \rho_i \sum_{i=k+1}^{s+1} \rho_i \right) + \frac{\mathbf{M} \left(\sum\limits_{i=k+1}^{s+1} \rho_i \right)^2}{\pi_k^2} \quad (k = 1, 2, \ldots, s). \tag{2.26}$$

Используя формулы (2.2), (2.7) и (2.8), без труда найдем, что

$$\mathbf{M} \left(\sum_{i=k+1}^{s+1} \rho_i \right)^2 = \frac{\pi_k (1 - \pi_k)}{n},$$

$$\mathbf{M} \left(\sum_{i=k+2}^{s+1} \rho_i \right)^2 = \frac{\pi_{k+1} (1 - \pi_{k+1})}{n},$$

$$\mathbf{M} \left(\sum_{i=k+1}^{s+1} \rho_i \sum_{i=k+2}^{s+1} \rho_i \right) = \frac{\pi_k (1 - \pi_{k+1})}{n}.$$

Подставляя эти выражения в (2.26), после несложных преобразований получим:

$$\mathbf{M} y_k^2 = \frac{p_{k+1}}{n\pi_k\pi_{k+1}} \quad (k = 1, 2, \ldots, s)$$

или, согласно (2.16) и (2.25), $\mathbf{M} u_k = 0 \quad (k = 1, 2, \ldots, s)$.

Для того чтобы доказать второе и третье утверждения леммы, заметим, что из (2.21) при $k = s$ следует, что

$$u_s = \frac{n}{\pi_s p_{s+1}} \rho_{s+1}^2 - 1.$$

Отсюда, используя формулы (2.2), (2.3) и (2.7), после несложных преобразований получим:

$$\mathbf{D}\,u_s = \mathbf{M}\,u_s^2 = \mathbf{M}\left(\frac{n}{\pi_s p_{s+1}}\,\rho_{s+1}^2 - 1\right)^2 = 2 + \frac{1}{n\pi_s p_{s+1}} - \frac{6}{n}.$$

Легко, однако, видеть, что согласно (2.10)

$$\frac{1}{n\pi_s p_{s+1}} - \frac{6}{n} = O\left(\frac{1}{n\pi_0}\right),$$

так что второе утверждение леммы доказано.

Аналогично, с помощью формул (2.2) — (2.7), доказывается и третье утверждение леммы.

В дальнейшем нам потребуются значения математических ожиданий первой, второй и четвертой степеней u_k при условии, что величина

$$\nu_{k+2} = m_{k+2} + m_{k+3} + \ldots + m_{s+1} \quad (k = 1, 2, \ldots s-1) \tag{2.27}$$

фиксирована и равна, например, h:

$$\nu_{k+2} = h. \tag{2.28}$$

Значение u_k при условии (2.28) будем обозначать $u_k|_h$, а соответствующие математические ожидания — символом $\mathbf{M}_h$.

Прежде чем переходить к следующим леммам, введем еще одно обозначение. Свяжем с числом h число z посредством следующего равенства:

$$h = n(1 - \pi_{k+1}) + z\sqrt{n\pi_{k+1}(1 - \pi_{k+1})}. \tag{2.29}$$

Теперь сформулируем и докажем следующие две леммы:

Лемма 4. *Справедливы соотношения*:

$$1)\quad u_k|_h = \frac{\pi_{k+1}}{n\pi_k p_{k+1}}(m_{k+1} - \mathbf{M}_h m_{k+1})^2 - 1, \tag{2.30}$$

$$\mathbf{M}_h u_k \equiv \alpha_k(h) = -\frac{z\sqrt{1-\pi_{k+1}}}{\sqrt{n\pi_{k+1}}}. \tag{2.31}$$

Доказательство. Преобразуем соотношение (2.21), используя (2.11), (2.12) и (2.27):

$$u_k + 1 = \frac{n\pi_k\pi_{k+1}}{p_{k+1}}\left(\frac{\sum\limits_{i=k+2}^{s+1}\rho_i}{\pi_{k+1}} - \frac{\sum\limits_{i=k+1}^{s+1}\rho_i}{\pi_k}\right)^2 =$$

$$= \frac{n\pi_k\pi_{k+1}}{p_{k+1}}\left[\frac{\frac{\nu_{k+2}}{n} - (1-\pi_{k+1})}{\pi_{k+1}} - \frac{\frac{m_{k+1}}{n} - p_{k+1}}{\pi_k} - \frac{\frac{\nu_{k+2}}{n} - (1-\pi_{k+1})}{\pi_k}\right]^2 =$$

$$= \frac{n}{p_{k+1}\pi_k\pi_{k+1}}\left[\left(\frac{m_{k+1}}{n} - p_{k+1}\right)\pi_{k+1} + \left(\frac{\nu_{k+2}}{n} - (1-\pi_{k+1})\right)p_{k+1}\right]^2.$$

При условии (2.28) отсюда получаем:

$$u_k|_h = \frac{n}{p_{k+1}\pi_k\pi_{k+1}}\left[\left(\frac{m_{k+1}}{n} - \frac{(n-h)\,p_{k+1}}{n\pi_{k+1}}\right)\pi_{k+1} + \frac{n-h}{n}\,p_{k+1} -\right.$$

$$-\pi_{k+1}p_{k+1}+\left(\frac{h}{n}-(1-\pi_{k+1})\right)p_{k+1}\Big]^2-1=$$

$$=\frac{\pi_{k+1}}{np_{k+1}\pi_k}\left[m_{k+1}-(n-h)\frac{p_{k+1}}{\pi_{k+1}}\right]^2-1=\frac{\pi_{k+1}}{np_{k+1}\pi_k}(m_{k+1}-\mathbf{M}_h m_{k+1})^2-1,$$

так как очевидно, что

$$\mathbf{M}_h m_{k+1}=(n-h)\frac{p_{k+1}}{\pi_{k+1}}. \tag{2.32}$$

Перейдем к доказательству второй части леммы.

Из (2.30) и (2.32) следует, что

$$\mathbf{M}_h u_k=\frac{\pi_{k+1}}{np_{k+1}\pi_k}M_h\left[m_{k+1}-(n-h)\frac{p_{k+1}}{\pi_{k+1}}\right]^2-1.$$

Согласно формуле (2.2), в которой m, n и p заменены соответственно на m_{k+1}, $n-h$ и $\frac{p_{k+1}}{\pi_{k+1}}$, отсюда получим:

$$\mathbf{M}_h u_k=\frac{\pi_{k+1}}{np_{k+1}\pi_k}(n-h)\frac{p_{k+1}}{\pi_{k+1}}\frac{\pi_k}{\pi_{k+1}}-1=\frac{1}{\pi_{k+1}}\left(1-\frac{h}{n}\right)-1,$$

или, ввиду (2.29),

$$\mathbf{M}_h u_k=-\frac{z\sqrt{1-\pi_{k+1}}}{\sqrt{n\pi_{k+1}}}\equiv\alpha_k(h).$$

Лемма доказана.

Лемма 5. *Если при одновременном безграничном возрастании n и s выполняется соотношение*

$$n\pi_0\to\infty,$$

то

1) $$\mathbf{M}_h u_k^3=2+C_1\alpha_k(h)+C_2\alpha_k^2(h)+O\left(\frac{1}{n\pi_0}\right), \tag{2.33}$$

2) $$\mathbf{M}_h u_k^4=60C_3\alpha_k(h)+C_4\alpha_k^2(h)+C_5\alpha_k^3(h)+C_6\alpha_k^4(h)+O\left(\frac{1}{n\pi_0}\right), \tag{2.34}$$

где

$$|C_i|<C\quad(i=1,2,\ldots,6),\quad C-\text{постоянная}.$$

Доказательство. Из (2.30) и (2.32) следует, что

$$\mathbf{M}_h u_k^2=\mathbf{M}_h\left[\frac{\pi_{k+1}}{np_{k+1}\pi_k}\left(m_{k+1}-(n-h)\frac{p_{k+1}}{\pi_{k+1}}\right)^2-1\right]^2=$$

$$=\frac{\pi_{k+1}^2}{n^2p_{k+1}^2\pi_k^2}\mathbf{M}_h\left[m_{k+1}-(n-h)\frac{p_{k+1}}{\pi_{k+1}}\right]^4-2\frac{\pi_{k+1}}{np_{k+1}\pi_k}\mathbf{M}_h\left[m_{k+1}-(n-h)\frac{p_{k+1}}{\pi_{k+1}}\right]+1.$$

Согласно формулам (2.2) и (2.3), в которых m, n и p заменены соответственно на m_{k+1}, $n-h$ и $\frac{p_{k+1}}{\pi_{k+1}}$, отсюда получим:

$$\mathbf{M}_h u_k^2=\frac{3}{\pi_{k+1}^2}\left(1-\frac{h}{n}\right)^2+$$

$$+\frac{1}{\pi_{k+1}}\left(1-\frac{h}{n}\right)\frac{\pi_{k+1}}{np_{k+1}\pi_k}\left(1-6\frac{p_{k+1}\pi_k}{\pi_{k+1}^2}\right)-\frac{2}{\pi_{k+1}}\left(1-\frac{h}{n}\right)+1,$$

или, так как согласно (2.29) и (2.31)

$$\frac{1}{\pi_{k+1}}\left(1-\frac{h}{n}\right)=1+\alpha_k(h),$$

будем иметь

$$\mathbf{M}_h u_k^2 = 3[1+\alpha_k(h)]^2 - 2[1+\alpha_k(h)] + 1 + \\ + \left(\frac{1}{n\pi_k}+\frac{1}{np_{k+1}}\right)\left(1-6\frac{\pi_k}{\pi_{k+1}}+6\frac{\pi_k^2}{\pi_{k+1}^2}\right)[1+\alpha_k(h)].$$

Легко, однако, видеть, что

$$\left(\frac{1}{n\pi_k}+\frac{1}{np_{k+1}}\right)\left(1-6\frac{\pi_k}{\pi_{k+1}}+6\frac{\pi_k^2}{\pi_{k+1}^2}\right)=O\left(\frac{1}{n\pi_0}\right),$$

а потому, вследствие условия леммы, получаем, что

$$\mathbf{M}_h u_k^2 = 2 + C_1\alpha_k(h) + C_2\alpha_k^2(h) + O\left(\frac{1}{n\pi_0}\right).$$

Аналогичным образом, используя формулы (2.2) — (2.7), докажем (2.34).

§ 3. Доказательства теорем

Теорема 1. *Если при одновременном безграничном возрастании* n *и* s *выполняется соотношение*

$$\min_{1\leqslant i\leqslant s+1} np_i \to \infty, \tag{3.1}$$

то равномерно по u

$$F(s+u\sqrt{2s})\to\Phi(u) \quad \textit{при } n, s\to\infty. \tag{3.2}$$

Доказательство. Используя метод, аналогичный примененному С. Н. Бернштейном в известной работе [1], введем величины

$$G_{s-k+1,n}=\mathbf{M}\,e^{\frac{it}{\sqrt{2s}}(u_k+\ldots+u_s)} \quad (k=1, 2, \ldots, s). \tag{3.3}$$

Так как согласно (2.15) и (2.20) $\sum_{k=1}^{s} u_k = \chi^2 - s$, то $G_{s,n}$ есть характеристическая функция $\frac{\chi^2-s}{\sqrt{2s}}$. Поэтому для доказательства теоремы достаточно показать, что $\lim\limits_{\substack{n\to\infty\\ s\to\infty}} G_{s,n}=e^{-\frac{t^2}{2}}$ при $|t|<T$ (T — постоянная), (3.4) т. е. что характеристическая функция $\frac{\chi^2-s}{\sqrt{2s}}$ при одновременном безграничном возрастании n и s стремится к характеристической функции нормального распределения. Отсюда, на основании теоремы непрерывности, будет следовать (3.2). Равномерность же сходимости по u в (3.2), как известно, вытекает из непрерывности $\Phi(u)$.

Итак, докажем (3.4). Прежде всего напишем очевидное равенство:

$$G_{s-k+1,n}=\mathbf{M}\,e^{\frac{it}{\sqrt{2s}}u_k}\,e^{\frac{it}{\sqrt{2s}}(u_{k+1}+\ldots+u_s)} = \\ = \sum_{l=0}^{n}\mathbf{P}_n(\nu_{k+2}=l)\,\mathbf{M}_l e^{\frac{it}{\sqrt{2s}}u_k}\,e^{\frac{it}{\sqrt{2s}}(u_{k+1}+\ldots+u_s)} \quad (k=1, 2, \ldots, s-1). \tag{3.5}$$

Из формулы (2.21) следует, что u_k, как случайная величина, зависит лишь от ν_{k+1} и ν_{k+2}, а при условии (2.28) лишь от m_{k+1}. Величина же $u_{k+1}+\ldots+u_s$, как случайная величина, зависит только от $m_{k+1}, \ldots, m_{s+1}$, сумма которых при условии (2.28) фиксирована. Отсюда вытекает, что при условии (2.28) величины u_k и $u_{k+1}+\ldots+u_s$ независимы, а потому из (3.5) следует

$$G_{s-k+1,n}=\sum_{h=0}^{n}\mathbf{P}_n(\nu_{k+2}=h)\,\mathbf{M}_h e^{\frac{it}{\sqrt{2s}}(u_{k+1}+\ldots+u_s)}\,\mathbf{M}_h e^{\frac{it}{\sqrt{2s}}u_k} \tag{3.6}$$
$$(k=1,\ 2,\ \ldots,\ s-1)$$

Согласно формуле Тейлора

$$\mathbf{M}_h e^{\frac{it}{\sqrt{2s}}u_k}=1-\frac{t^2}{2s}+\frac{it}{\sqrt{2s}}\mathbf{M}_h u_k-\frac{t^2}{4s}(\mathbf{M}_h u_k^2-2)+\theta_k\frac{i^3t^3}{3!\,(2s)^{\frac{3}{2}}}\mathbf{M}_h u_k^3, \tag{3.7}$$

где $|\theta_k|<1$.

Подставляя (3.7) в (3.6), получим рекуррентное соотношение

$$G_{s-k+1,n}=G_{s-k,n}\left(1-\frac{t^2}{2s}\right)+R_{s-k+1,n}\quad(k=1,\ 2,\ \ldots,\ s-1), \tag{3.8}$$

где

$$R_{s-k+1,n}=\sum_{h=0}^{n}\mathbf{P}_n(\nu_{k+2}=h)\,\mathbf{M}_h e^{\frac{it}{\sqrt{2s}}(u_{k+1}+\ldots+u_s)}\left[\frac{it}{\sqrt{2s}}\mathbf{M}_h u_k-\right.$$
$$\left.-\frac{t^2}{4s}(\mathbf{M}_h u_k^2-2)+\theta_k\frac{i^3t^3}{3!\,(2s)^{\frac{3}{2}}}\mathbf{M}_h u_k^3\right]. \tag{3.9}$$

Формула (3.8) при $k=1$ принимает вид:

$$G_{s,n}=G_{s-1,n}\left(1-\frac{t^2}{2s}\right)+R_{s,n}.$$

Применяя эту формулу последовательно $s-1$ раз, получим

$$G_{s,n}=G_{1,n}\left(1-\frac{t^2}{2s}\right)^{s-1}+\sum_{k=1}^{s-1}R_{s-k+1,n}\left(1-\frac{t^2}{2s}\right)^{k-1}. \tag{3.10}$$

Но согласно (3.3), (2.22) и (2.23)

$$G_{1,n}=\mathbf{M}\,e^{\frac{it}{\sqrt{2s}}u_s}=\mathbf{M}\left(1+\frac{it}{\sqrt{2s}}u_s-\frac{t^2}{4s}u_s^2+\theta_s\frac{i^3t^3}{3!\,(2s)^{\frac{3}{2}}}u_s^3\right)=1-\frac{t^2}{2s}\varepsilon_{s,n}, \tag{3.11}$$

где

$$\varepsilon_{s,n}=\theta_s\frac{i^3t^3}{3!\,(2s)^{\frac{3}{2}}}\mathbf{M}\,u_s^3+O\left(\frac{t^2}{s\cdot n\pi_0}\right). \tag{3.12}$$

Подставляя (3.11) в (3.10), будем иметь

$$G_{s,n}=\left(1-\frac{t^2}{2s}\right)^{s}+\varepsilon_{s,n}\left(1-\frac{t^2}{2s}\right)^{s-1}+\sum_{k=1}^{s-1}R_{s-k+1,n}\left(1-\frac{t^2}{2s}\right)^{k-1} \tag{3.13}$$

или, обозначая

$$R^*_{s,n} = \varepsilon_{s,n}\left(1-\frac{t^2}{2s}\right)^{s-1} + \sum_{k=1}^{s-1} R_{s-k+1,n}\left(1-\frac{t^2}{2s}\right)^{k-1}, \qquad (3.14)$$

перепишем (3.13) в виде

$$G_{s,n} = \left(1-\frac{t^2}{2s}\right)^s + R^*_{s,n}. \qquad (3.15)$$

Покажем, что при $|t|<T$ и одновременном возрастании n и s

$$R^*_{s,n} \to 0 \quad \text{при } n, s \to \infty \qquad (3.16)$$

(T — постоянная).

При $|t|<T$ для достаточно большого s из (3.14) получаем

$$|R^*_{s,n}| < |\varepsilon_{s,n}| + \sum_{k=1}^{s-1} |R_{s-k+1,n}|. \qquad (3.17)$$

Для оценки $\varepsilon_{s,n}$ используем хорошо известные неравенства для абсолютных моментов

$$\beta_\nu^{\frac{1}{\nu}} \leqslant \beta_{\nu+1}^{\frac{1}{\nu+1}} \quad (\nu = 1, 2, \ldots) \qquad (3.18)$$

(β_ν — ν-ый абсолютный момент случайной величины).

Применяя (3.18) к величине u_s при $\nu = 3$, ввиду (2.24) и (3.1) получим

$$\mathbf{M}|u_s^3| \leqslant (\mathbf{M}u_s^4)^{\frac{3}{4}} < C, \qquad (3.19)$$

где C — постоянная.

Теперь согласно (3.12) и (3.19) получаем

$$|\varepsilon_{s,n}| = O\left(\frac{1}{s^{\frac{3}{2}}}\right) + O\left(\frac{1}{s\cdot n\tau_0}\right)$$

и, следовательно, согласно (3.1), при одновременном возрастании n и s

$$\varepsilon_{s,n} \to 0 \quad \text{при } n, s \to \infty. \qquad (3.20)$$

Остается оценить $\sum_{k=1}^{s-1} |R_{s-k+1,n}|$.

Прежде всего, учитывая, что $\left|\mathbf{M}_h e^{\frac{it}{\sqrt{2s}}(u_{k+1}+\ldots+u_s)}\right| \leqslant 1$, из (3.9) при $|t|<T$ будем иметь:

$$|R_{s-k+1,n}| \leqslant \sum_{h=0}^{n} \mathbf{P}_n(\nu_{k+2} = h)\left(\frac{T}{\sqrt{2s}}|\mathbf{M}_h u_k| + \right.$$

$$\left. + \frac{T^2}{4s}|\mathbf{M}_h u_k^2 - 2| + \frac{T^3}{3!\,(2s)^{\frac{3}{2}}}\mathbf{M}_h|u_k^3|\right) \quad (k = 1, 2, \ldots, s-1). \qquad (3.21)$$

Оценим в отдельности каждое из трех слагаемых в правой части равенства (3.21).

Ввиду (2.29) и (2.31)

$$\sum_1 = \frac{T}{\sqrt{2s}} \sum_{h=0}^{n} \mathbf{P}_n(\nu_{k+2} = h) \, |\mathbf{M}_h u_k| = \frac{T}{\sqrt{2s}} \sqrt{\frac{1-\pi_{k+1}}{n\pi_{k+1}}} \sum_{h=0}^{n} \mathbf{P}_n(\nu_{k+2} = h) \, |z| =$$

$$= \frac{T}{\sqrt{2s}} \sqrt{\frac{1-\pi_{k+1}}{n\pi_{k+1}}} \sum_{h=0}^{n} \mathbf{P}_n(\nu_{k+2} = h) \left| \frac{h - n(1-\pi_{k+1})}{\sqrt{n\pi_{k+1}(1-\pi_{k+1})}} \right|. \tag{3.22}$$

Но ввиду (3.18)

$$\sum_{h=0}^{n} \mathbf{P}_n(\nu_{k+2} = h) \left| \frac{h - n(1-\pi_{k+1})}{\sqrt{n\pi_{k+1}(1-\pi_{k+1})}} \right| \leqslant$$

$$\leqslant \sqrt{\sum_{h=0}^{n} \mathbf{P}_n(\nu_{k+2} = h) \, \frac{[h - n(1-\pi_{k+1})]^2}{n\pi_{k+1}(1-\pi_{k+1})}} = 1, \tag{3.23}$$

так что из (3.22) имеем:

$$\sum_1 \leqslant \frac{T}{\sqrt{2s}} \sqrt{\frac{1-\pi_{k+1}}{n\pi_{k+1}}} \quad (k = 1, 2, \ldots, s-1). \tag{3.24}$$

Для оценки второго слагаемого

$$\sum_2 = \frac{T^2}{4s} \sum_{h=0}^{n} \mathbf{P}_n(\nu_{k+2} = h) \, |\mathbf{M}_h u_k^2 - 2| \tag{3.25}$$

используем формулу (2.33), согласно которой

$$|\mathbf{M}_h u_k^2 - 2| < C_1 |\alpha_k(h)| + C_2 \alpha_k^2(h) + \frac{C_3}{n\pi_0}, \tag{3.26}$$

где C_1, C_2, C_3 — постоянные.

Теперь из (3.25) и (3.26) согласно (2.31) имеем:

$$\sum_2 < \frac{T^2}{4s} \left[C_1 \sqrt{\frac{1-\pi_{k+1}}{n\pi_{k+1}}} \sum_{h=0}^{n} \mathbf{P}_n(\nu_{k+2} = h) \, |z| + \right.$$

$$\left. + C_2 \frac{1-\pi_{k+1}}{n\pi_{k+1}} \sum_{h=0}^{n} \mathbf{P}_n(\nu_{k+2} = h) \, z^2 + \frac{C_3}{n\pi_0} \right].$$

Или на основании (3.23)

$$\sum_2 < \frac{C_1 T^2}{4s} \sqrt{\frac{1-\pi_{k+1}}{n\pi_{k+1}}} + \frac{C_2 T^2}{4s} \frac{1-\pi_{k+1}}{n\pi_{k+1}} + \frac{C_3 T^2}{4s \cdot n\pi_0},$$

откуда для достаточно больших n и s находим, что

$$\sum_2 < \frac{LT^2}{s} \sqrt{\frac{1-\pi_{k+1}}{n\pi_{k+1}}} \quad (k = 1, 2, \ldots, s-1), \tag{3.27}$$

где L — постоянная.

Перейдем к оценке третьего слагаемого

$$\sum_3 = \frac{T^3}{3!\,(2s)^{\frac{3}{2}}} \sum_{h=0}^{n} \mathbf{P}_n(\nu_{k+2} = h) \, \mathbf{M}_h \, |u_k^3|. \tag{3.28}$$

Разобьем сумму Σ_3 на две суммы, первую из которых распространим на значения h, соответствующие $|\alpha_h(h)| \leqslant 1$, а вторую — на остальные значения h, соответствующие $|\alpha_k(h)| > 1$:

$$\sum_3 = \sum_{(|\alpha_k| \leqslant 1)} + \sum_{(|\alpha_k| > 1)}.$$

Из (2.34) при условии (3.1) имеем

$$\mathbf{M}_h u_k^4 < C, \quad \text{если } |\alpha_k(h)| \leqslant 1$$
$$\mathbf{M}_h u_k^4 < C' \alpha_k^4(h), \quad \text{если } |\alpha_k(h)| > 1$$

(C и C' — постоянные).

Поэтому, согласно (3.18) и (2.31),

$$\mathbf{M}_h |u_k^3| \leqslant (\mathbf{M}_h u_k^4)^{\frac{3}{4}} < C_1, \quad \text{если } |\alpha_k(h)| \leqslant 1 \tag{3.29}$$

и

$$\mathbf{M}_h |u_k^3| < C_1' \alpha_k^4(h) = C_1' \left(\frac{1-\pi_{k+1}}{n\pi_{k+1}}\right)^2 z^4, \quad \text{если } |\alpha_k(h)| > 1 \tag{3.30}$$

(C_1 и C_1' — постоянные).

Теперь из (3.28), (3.29) и (3.30) получаем

$$\sum_{(|\alpha_k| \leqslant 1)} < \frac{C_1 T^3}{3!\,(2s)^{\frac{3}{2}}}, \tag{3.31}$$

$$\sum_{(|\alpha_k| > 1)} < \frac{C_1' T^3}{3!\,(2s)^{\frac{3}{2}}} \cdot \frac{(1-\pi_{k+1})^2}{(n\pi_{k+1})^2} \sum_{|\alpha_k(h)| > 1} \mathbf{P}_n(\nu_{k+2} = h)\, z^4. \tag{3.32}$$

Но так как согласно (2.3) и (2.29)

$$\sum_{(|\alpha_k(h)| > 1} \mathbf{P}_n(\nu_{k+2} = h)\, z^4 < \sum_{h=0}^{n} \mathbf{P}_n(\nu_{k+2} = h)\, z^4 =$$

$$= \sum_{h=0}^{n} \mathbf{P}_n(\nu_{k+2} = h) \left[\frac{h - n(1-\pi_{k+1})}{\sqrt{n\pi_{k+1}(1-\pi_{k+1})}}\right]^4 = 3 + O\left(\frac{1}{n\pi_0}\right), \tag{3.33}$$

то из (3.28), (3.31), (3.32) и (3.33) находим, что при условии (3.1)

$$\sum_3 < \frac{L' T^3}{s^{\frac{3}{2}}}, \tag{3.34}$$

где L' — постоянная.

Итак, собирая вместе оценки (3.24), (3.27) и (3.34) из (3.21), получим:

$$|R_{s-k+1,\,n}| < \frac{T}{\sqrt{s}} \sqrt{\frac{1-\pi_{k+1}}{n\pi_{k+1}}} + \frac{LT^2}{s} \sqrt{\frac{1-\pi_{k+1}}{n\pi_{k+1}}} + \frac{L'T^3}{s^{\frac{3}{2}}} \quad (k = 1, 2, \ldots, s-1),$$

а следовательно,

$$\sum_{k=1}^{s-1} |R_{s-k+1,\,n}| < \frac{T}{\sqrt{s}} \sum_{k=1}^{s-1} \sqrt{\frac{1-\pi_{k+1}}{n\pi_{k+1}}} + \frac{LT^2}{s} \sum_{k=1}^{s-1} \sqrt{\frac{1-\pi_{k+1}}{n\pi_{k+1}}} + \frac{L'T^3(s-1)}{s^{\frac{3}{2}}}.$$

Но так как

$$\sum_{k=1}^{s-1}\sqrt{\frac{1-\pi_{k+1}}{n\pi_{k+1}}}\leqslant\sum_{k=1}^{s-1}\sqrt{\frac{1}{n\pi_0(k+1)}}\leqslant\frac{1}{\sqrt{n\pi_0}}\int_0^s\frac{dx}{\sqrt{x}}=\frac{2\sqrt{s}}{\sqrt{n\pi_0}},$$

то

$$\sum_{k=1}^{s-1}|R_{s-k+1,\,n}|<\frac{2T}{\sqrt{n\pi_0}}+\frac{2LT^2}{\sqrt{n\pi_0}}+\frac{L'T^3(s-1)}{s^{\frac{3}{2}}}.$$

Таким образом, согласно (3.1) при одновременном возрастании n и s

$$\sum_{k=1}^{s-1}|R_{s-k+1,\,n}|\to 0\quad\text{при } n,\ s\to\infty. \tag{3.35}$$

Теперь из (3.17), (3.20) и (3.35) получаем, что $R^*_{s,\,n}\to 0$ при $n,\ s\to\infty$, а тогда из (3.15) сразу следует, что

$$\lim_{\substack{n\to\infty\\ s\to\infty}} G_{s,\,n}=e^{-\frac{t^2}{2}},$$

что и требовалось доказать.

Из теоремы 1 легко следует

Теорема 2. *Как бы ни изменялись одновременно* n, s и p_i $(i=1,2,\ldots,s+1)$, *при условии*

$$\min_{1\leqslant i\leqslant s+1} np_i\to\infty \tag{3.1}$$

равномерно по x *имеет место соотношение*

$$|F(x)-K_s(x)|\to 0.$$

Доказательство. Очевидно,

$$|F(x)-K_s(x)|\leqslant|F(x)-\Phi(u)|+|K_s(x)-\Phi(u)|, \tag{3.36}$$

где $u=\dfrac{x-s}{\sqrt{2s}}$.

Если $s\to\infty$, то

1) Согласно теореме 1 при условии (3.1) равномерно по u (или по x)

$$|F(x)-\Phi(u)|\to 0\quad\text{при } s,\ n\to\infty.$$

2) Согласно (1.3) равномерно по x

$$|K_s(x)-\Phi(u)|\to 0\quad\text{при } s\to\infty,$$

а тогда из (3.36) сразу следует, что равномерно по x

$$|F(x)-K_s(x)|\to 0\quad\text{при } s,\ n\to\infty.$$

Если же s — конечно, то, как известно, при $n\to\infty$ равномерно по x $F(x)\to K_s(x)$.

Просматривая доказательство этого предложения ([2], стр. 455—456), легко убедиться, что оно сохраняет свою силу и при условии (3.1).

Теорема доказана.

В заключение выражаю глубокую благодарность проф. Н. В. Смирнову за ценные советы, данные при выполнении настоящей работы.

Поступила в редакцию
12. 7. 55

ЛИТЕРАТУРА

[1] С. Н. Бернштейн, Распространение предельной теоремы теории вероятностей на суммы зависимых величин. Успехи матем. наук, вып. X (1944).
[2] Г. Крамер, Математические методы статистики, Москва, 1949.
[3] J. Haldan, The exact value of the moments of the distribution of χ^2 used as a test if goodness of fit when expectations are smal. Biometrics, 29 (1937), p. 133.

ASYMPTOTIC DISTRIBUTION OF χ^2 CRITERION WHEN THE SIZE OF OBSERVATIONS AND THE NUMBER OF GROUPS SIMULTANEOUSLY INCREASE

S. H. TUMANYAN (EREVAN)

(Summary)

The expression

$$\chi^2 = \sum_{i=1}^{s+1} \frac{n}{p_i}\left(\frac{m_i}{n} - p_i\right)^2$$

is used in estimating the divergence between the given probabilities $p_1, p_2, \ldots, p_{s+1}$ for possible outcomes of the test and the relative frequencies $\frac{m_1}{n}, \frac{m_2}{n}, \ldots, \frac{m_{s+1}}{n}$ with which these outcomes appear in n independent tests.

Let

$$F(x) = \mathrm{P}\{\chi^2 < x\}, \quad \Phi(u) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{u} e^{-t^2/2} dt$$

$$K_s(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{2^{s/2}\Gamma\left(\dfrac{s}{2}\right)} \displaystyle\int_0^x y^{s/2-1} e^{-y/2} dy, & x \geqslant 0 \\ 0, & x < 0 \end{cases}$$

The following theorems are proved:

Theorem 1. *If*

$$\min_{1 \leqslant i \leqslant s+1} (np_i) \to \infty$$

or simultaneous unlimited increase of n *and* s, *then*

$$F(s + u\sqrt{2s}) \to \Phi(u)$$

uniformly for u.

Theorem 2. However be the simultaneous change of n, s and p_i, if $\min\limits_{1 \leqslant i \leqslant s+1} (np_i) \to \infty$, then $F(x) \to K_s(x)$ uniformly for x.

ТЕОРИЯ ВЕРОЯТНОСТЕЙ
Том I И ЕЕ ПРИМЕНЕНИЯ Выпуск 1
1956

КРАТКИЕ СООБЩЕНИЯ

СЛУЧАЙНЫЕ ПРОЦЕССЫ, РЕАЛИЗАЦИИ КОТОРЫХ ЯВЛЯЮТСЯ ОБОБЩЕННЫМИ ФУНКЦИЯМИ

К. УРБАНИК

1. Во многих задачах физики рассматриваются случайные процессы, реализации которых суть обобщенные функции (например броуновское движение, уравнение Ланжевена, белый шум и др.). И. М. Гельфанд [1] и К. Ито [2], пользуясь методами функционального анализа, создали теорию обобщенных случайных процессов (случайных функционалов). В настоящей заметке рассматривается такое, в некотором смысле наименьшее, расширение понятия случайного процесса, что всякий обобщенный процесс дифференцируем. Используемый в нашей заметке метод представления обобщенного процесса последовательностью обычных процессов встречается по существу в неявном виде в работах физиков и аналогичен методу Микусинского [3—4] определения обобщенных функций. При такой трактовке доказательства теорем почти тривиальны и такие понятия, как корреляционная функция и т. п., вводятся таким же образом, как в теории обычных процессов. Заметим, что предлагаемая нами теория не тождественна теории Гельфанда. Даже некоторые теоремы (например спектральное разложение корреляционной функции стационарного процесса), на первый взгляд тождественные, все же отличаются использованными в них понятиями сходимости и т. п.

2. Пусть Ω — пространство элементарных событий ω. Если $f(\omega, t)$ — случайный процесс (т. е. измеримая функция случайного аргумента ω и действительного аргумента t), то при фиксированном ω функция $g(t) = f(\omega, t)$ называется реализацией процесса $f(\omega, t)$. Случайный процесс — непрерывен, если для почти всех $\omega \in \Omega$ его реализации непрерывны, а регулярен, если для почти всех $\omega \in \Omega$ его реализации непрерывны справа и имеют лишь точки разрыва первого рода. Последовательность случайных процессов сходится: $f_n(\omega, t) \rightrightarrows f(\omega, t)$, если для почти всех $\omega_0 \in \Omega$ реализации $f_n(\omega_0, t)$ сходятся к реализации $f(\omega_0, t)$ равномерно во всяком конечном интервале. Последовательность непрерывных процессов $\{f_n(\omega, t)\}$ — фундаментальна, если существуют сходящаяся последовательность процессов $\{F_n(\omega, t)\}$ и целое неотрицательное число k такие, что $F_n^{(k)}(\omega, t) = f_n(\omega, t)$ для почти всех $\omega \in \Omega$. Две последовательности $\{f_n(\omega, t)\}$ и $\{g_n(\omega, t)\}$ — эквивалентны, если существуют последовательности $\{F_n(\omega, t)\}$ и $\{G_n(\omega, t)\}$ и целое неотрицательное число k такие, что $F_n(\omega, t) - G_n(\omega, t) \rightrightarrows 0$ и $F_n^{(k)}(\omega, t) = f_n(\omega, t)$, $G_n^k(\omega, t) = g_n(\omega, t)$ для почти всех $\omega \in \Omega$. Соотношение эквивалентности разбивает множество всех фундаментальных последовательностей на непересекающиеся классы, которые называем обобщенными случайными процессами и обозначаем заглавными греческими буквами $\Phi(\omega, t)$, $\Psi(\omega, t)$, ... Если $\{f_n(\omega, t)\} \in \Phi(\omega, t)$, то пишем $\Phi(\omega, t) = [f_n(\omega, t)]$. Как обычно, сложение, умножение на число и сопряжение обобщенных процессов определяется формулами $[f_n(\omega, t)] + [g_n(\omega, t)] = [f_n(\omega, t) + g_n(\omega, t)]$,

$$\lambda [f_n(\omega, t)] = [\lambda f_n(\omega, t)], \quad [\overline{f_n(\omega, t)}] = [\overline{f_n(\omega, t)}].$$

Легко доказывается, что для произвольного обобщенного процесса справедливо равенство $\Phi(\omega, t) = [h_n(\omega, t)]$, где $h_n(\omega, t)$ — случайные процессы с бесконечно-диффе-

ренцируемыми реализациями. Итак, обобщенную производную обобщенных процессов определяем формулой $\frac{d}{dt}\Phi(\omega, t) = \frac{d}{dt}[h_n(\omega, t)] = [h'_n(\omega, t)]$. (Правая часть этой формулы не зависит от выбора бесконечно дифференцируемого представления $h_n(\omega, t)$). При фиксированном $\omega_0 \in \Omega$, класс последовательностей $\Phi(\omega_0, t) = [f_n(\omega_0, t)]$ называется реализацией обобщенного процесса $\Phi(\omega, t)$. Из определения обобщенных функций, данного Микусинским [4], непосредственно следует, что при почти всех $\omega \in \Omega$ реализации обобщенного процесса суть обобщенные функции. Обычные непрерывные, и вообще регулярные, случайные процессы изоморфно вложены в пространство обобщенных процессов, а обычные процессы с локально суммируемыми реализациями вложены лишь гомоморфно. Из определений непосредственно следует, что всякий обобщенный процесс является обобщенной производной конечного порядка некоторого непрерывного процесса. Сходимость в пространстве обобщенных процессов определяется следующим образом: $\Phi_n(\omega, t) \to \Phi(\omega, t)$, когда существуют непрерывные процессы $F_n(\omega, t)$, $F(\omega, t)$ и целое неотрицательное число k, для которых $\frac{d^k}{dt^k} F_n(\omega, t) = \Phi_n(\omega, t)$, $\frac{d^k}{dt^k} F(\omega, t) = \Phi(\omega, t)$ и $F_n(\omega, t) \rightrightarrows F(\omega, t)$. Например, пусть $\Psi(\omega, t)$ — однородный регулярный пуассоновский процесс. Тогда $\frac{d}{dt}\Psi(\omega, t) = \sum_k \delta(t - \nu_k(\omega))$, где $\nu_k(\omega)$ — некоторые случайные величины. Легко также доказать, что для произвольного обобщенного процесса $\Phi(\omega, t)$: $\sum_k \lambda_{kn}(\omega)\,\delta(t - \nu_{kn}(\omega)) \to \Phi(\omega, t)$, при надлежащем выборе случайных величин $\lambda_{kn}(\omega)$ и $\nu_{kn}(\omega)$. Пусть $\Phi(\omega, t) = \frac{d^k}{dt^k} F(\omega, t)$, где $F(\omega, t)$ — непрерывный процесс с непрерывным математическим ожиданием $\mathbf{M}(t) = \mathbf{M}\{F(\omega, t)\}$. Тогда математическое ожидание обобщенного процесса $\Phi(\omega, t)$ определяется формулой: $\mathbf{M}\{\Phi(\omega, t)\} = \frac{d^k}{dt^k}\mathbf{M}\{F(\omega, t)\}$.

3. Обобщенный процесс $\Phi(\omega, t)$ имеет независимые приращения, если можно представить его в виде $\Phi(\omega, t) = [f_n(\omega, t)]$, где для произвольного $\varepsilon > 0$ и достаточно большого n процесс $f_n(\omega, t)$ имеет независимые приращения в интервалах, расстояние между которыми $\geqslant \varepsilon$. Доказывается, что для регулярных процессов это определение равносильно обычному определению независимости приращений. Аналогично определяется независимость значений обобщенного процесса. Именно, обобщенный процесс $\Phi(\omega, t)$ имеет независимые значения, если он представим в виде $\Phi(\omega, t) = [f_n(\omega, t)]$, где для произвольного $\varepsilon > 0$ и достаточно большого n процесс $f_n(\omega, t)$ имеет независимые значения в точках с расстоянием $\geqslant \varepsilon$. Связь между процессами с независимыми значениями и с независимыми приращениями устанавливает следующая теорема: *Обобщенный процесс тогда и только тогда имеет независимые значения, если он является производной первого порядка некоторого обобщенного процесса с независимыми приращениями.*

4. Аналогично случаю одной переменной определяются обобщенные процессы, зависящие от многих переменных $t_1, t_2, \ldots, t_v$: $\Phi(\omega, t_1, t_2, \ldots, t_v) = [f_n(\omega, t_1, t_2, \ldots, t_v)]$, где f_n — непрерывные процессы. Для произвольных обобщенных процессов $\Phi_1(\omega, t) = [f_n(\omega, t)]$ и $\Phi_2(\omega, t) = [g_n(\omega, t)]$ всегда существует прямое произведение

$$\Phi(\omega, t_1, t_2) = \Phi_1(\omega, t_1)\,\Phi_2(\omega, t_2) = [f_n(\omega, t_1)\,g_n(\omega, t_2)],$$

являющееся обобщенным процессом, зависящим от двух переменных t_1, t_2. Корреляционная функция обобщенного процесса определяется, как обычно, формулой

$$R_\Phi(t_1, t_2) = \mathbf{M}\{(\Phi(\omega, t_1) - \mathbf{M}\{\Phi(\omega, t_1)\})\,\overline{(\Phi(\omega, t_2) - \mathbf{M}\{\Phi(\omega, t_2)\})}\}.$$

В общем случае корреляционная функция является обобщенной функцией двух переменных.

Обобщенный процесс $\Phi(\omega, t)$ стационарен, если математическое ожидание $\mathbf{M}\{\Phi(\omega, t)\}$ постоянно и корреляционная функция $R_\Phi(t_1, t_2)$ зависит лишь от разно-

сти $t_1 - t_2$, т. е. $R_\Phi(t_1, t_2) = [v_n(t_1 - t_2)]$. Кроме обычных стационарных процессов, примером обобщенного стационарного процесса может служить производная однородного нормального процесса. Корреляционная функция имеет здесь вид $\sigma^2\delta(t_1 - t_2)$. Легко доказать общую теорему: *Обобщенная функция $R(t_1, t_2)$ тогда и только тогда является корреляционной функцией некоторого обобщенного стационарного процесса с независимыми значениями, когда* $R(t_1, t_2) = \sum_{k=0}^{n} C_k i^k \delta^{(k)}(t_1 - t_2)$, *где* C_k — *действительные константы, удовлетворяющие при всех действительных* x *условию:* $\sum_{k=0}^{n} C_k x^k \geqslant 0$ (ср. [1]). Вообще корреляционная функция обобщенного стационарного процесса представима в виде $R_\Phi(t_1, t_2) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\lambda(t_1 - t_2)} dH(\lambda)$ *, где $H(\lambda)$ — неубывающая непрерывная справа функция и $\lim_{|\lambda| \to \infty} \frac{H(\lambda)}{\lambda^k} = 0$ при некотором k (ср. [1—2]). Можно также доказать, что тогда $\Phi(\omega, t) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\lambda t} dZ(\omega, \lambda)$, где $Z(\omega, \lambda)$ — обычный процесс с некоррелированными приращениями и $\mathbf{M}\{|Z(\omega, \lambda_2) - Z(\omega, \lambda_1)|^2\} = H(\lambda_2) - H(\lambda_1)$ в точках непрерывности $\lambda_1 < \lambda_2$ функции $H(\lambda)$. Корреляционную функцию стационарного процесса можно рассматривать, в силу равенства $R_\Phi(t_1, t_2) = B_\Phi(t_1 - t_2)$, как обобщенную функцию одной переменной $B_\Phi(t)$. Для обобщенных стационарных процессов справедлива эргодическая теорема: *равенство*

$$\frac{1}{2T} \int_{-T+t}^{T+t} \Phi(\omega, u)\, du \to \mathbf{M}\{\Phi(\omega, t)\} \quad \textit{при } T \to \infty \text{ **}$$

имеет место тогда и только тогда, когда

$$\frac{1}{2T} \int_{-T+t}^{T+t} B_\Phi(u)\, du \to 0 \quad \textit{при } T \to \infty.$$

Значением обобщенного процесса $\Phi(\omega, t)$ в точке t_0 называется предел семейства $\Phi_\varepsilon(\omega, t) = \Phi(\omega, \varepsilon t + t_0)$ при $\varepsilon \to 0$; (см. [5—6]). Доказывается, что обобщенные стационарные процессы с независимыми значениями либо всюду имеют значение, либо всюду не имеют значения. Например, производная однородного пуассоновского процесса имеет всюду значение нуль, а производная однородного нормального процесса не имеет значения ни в одной точке.

Поступила в редакцию
10. 2. 56

ЛИТЕРАТУРА

[1] И. М. Гельфанд, ДАН СССР, **100**, № 5 (1955), 852.
[2] K. Ito, Memoirs of the Coll. of Science, **28**, Nr 3 (1954), 209.
[3] J. Mikusinski, Fund. Math., **35** (1948), 235.

---

* Если последовательность $f_n(t) = \int_{-n}^{n} f(\lambda, t)\, dF(\lambda)$ фундаментальна, то принимаем $\int_{-\infty}^{\infty} f(\lambda, t)\, dF(\lambda) = [f_n(t)]$.

** Для обобщенных функций $f(t)$ интеграл $\int_{A+t}^{B+t} f(u)\, du$ определен в работе [5].

[4] И. Микусинский, Бюлл. Польск. Акад. наук, Отд. III, 3, № 11 (1955).
[5] С. Лоясевич, И. Влека и З. Зелезьный, Бюлл. Польск. Акад. наук, Отд. III, 3, № 9 (1955), 475.
[6] S. Łojasiewicz, Studia Math., 16 (в печати).

Математический институт
Польской Академии наук

STOCHASTIC PROCESSES WHOSE SAMPLE FUNCTIONS ARE DISTRIBUTIONS

K. URBAŃIK (WROCŁAW)

(Summary)

A way of constructing generalized random processes is given which is analogous to Mikusinsky's method for defining distributions. The subject of this note are generalized stochastic processes with independent values or independent increments and stationary processes.

СТРОГО МАРКОВСКИЕ ПРОЦЕССЫ *

Е. Б. ДЫНКИН и А. А. ЮШКЕВИЧ

§ 1. Определения. Основные результаты

1. Пусть $\mathcal{E}$ — метрическое пространство, $\mathfrak{B}$ — σ-алгебра, порожденная открытыми множествами пространства $\mathcal{E}$. Мы будем говорить, что в пространстве $\mathcal{E}$ задан случайный процесс, если заданы:

а) Некоторое вспомогательное пространство Ω — «пространство элементарных событий»;

б) функция $x(t, \omega)\,(0 \leqslant t < +\infty,\ \omega \in \Omega)$ со значениями из $\mathcal{E}$;

в) система вероятных мер $\mathbf{P}_x\,(x \in \mathcal{E})$ на пространстве Ω.

При этом:

1) все меры $\mathbf{P}_x$ определены на σ-алгебре $\mathfrak{M}$, порождаемой множествами

$$\{x(t, \omega) \in \Gamma\} \quad (t \geqslant 0,\ \Gamma \in \mathfrak{B}). \tag{1}$$

2) $\mathbf{P}_x\{x(0, \omega) = x\} = 1$.

Если $\zeta = \zeta(\omega)$—измеримая функция на Ω, то мы будем обозначать через $\mathbf{M}_x\zeta$ интеграл $\int\limits_{\Omega} \zeta(\omega)\,\mathbf{P}_x(d\omega)$.

Если для всякого множества

$$C = \{x(t_1, \omega) \in \Gamma_1, \ldots, x(t_n, \omega) \in \Gamma_n\},\ (0 < t_1 < \ldots < t_n;\ \Gamma_1, \ldots, \Gamma_n \in \mathfrak{B}),$$

$$\mathbf{P}_x(C) = \int\limits_{\Gamma_1} \ldots \int\limits_{\Gamma_{n-1}} \mathbf{P}(t_1, x, dy_1)\,\mathbf{P}(t_2 - t_1, y_1, dy_2) \ldots \mathbf{P}(t_n - t_{n-1}, y_{n-1}, \Gamma_n), \tag{2}$$

где $\mathbf{P}(t, x, \Gamma)$ — функция, $\mathfrak{B}$-измеримая относительно x, являющаяся вероятностной мерой относительно Γ и удовлетворяющая уравнению Колмогорова — Чэпмена

$$\int\limits_{\mathcal{E}} \mathbf{P}(s, x, dy)\,\mathbf{P}(t, y, \Gamma) = \mathbf{P}(s + t, x, \Gamma),$$

* После того как работа была сдана в печать, авторам стало известно, что в недавно опубликованной работе [G. A. Hunt, Some theorems concerning brownian motion, Trans. Amer. Math. Soc., 81, 3 (1956), 294—319] Хант доказал, что многомерное броуновское движение является строго марковским процессом. В той форме, в которой это свойство формулируется Хантом, оно применимо только к процессам с независимыми приращениями.

то случайный процесс называется *однородным по времени марковским процессом* с переходными вероятностями $\mathbf{P}(t, x, \Gamma)$.

Можно показать (см. [1]), что случайный процесс является однородным по времени марковским процессом тогда и только тогда, когда для любых $\Gamma_1, \dots, \Gamma_n \in \mathfrak{B}$; $0 < s_1 < \dots < s_k < s$; $0 < t_1 < \dots < t_n$ с вероятностью 1

$$\mathbf{P}\{x(s+t_1) \in \Gamma_1, \dots, x(s+t_n) \in \Gamma_n \mid x(s_1), \dots, x(s_k), x(s)\} = \\ = \mathbf{P}_{x(s)}\{x(t_1) \in \Gamma_1, \dots, x(t_n) \in \Gamma_n\}^{*}). \tag{3}$$

Обозначим через $\mathfrak{M}_s$ σ-алгебру, порожденную множествами (1) при $t \leqslant s$. Условные вероятности относительно $\mathfrak{M}_s$ будем обозначать, как вероятности при условии, что задано течение процесса при $t \leqslant s$. Тогда условие (3) можно записать в виде:

$$\mathbf{P}\{x(s+t_1) \in \Gamma_1, \dots; x(s+t_n) \in \Gamma_n \mid x(u)_{u \leqslant s}\} = \mathbf{P}_{x(s)}\{x(t_1) \in \Gamma_1, \dots, x(t_n) \in \Gamma_n\}. \tag{4}$$

2. Определение марковского процесса, приведенное в $n°1$, является слишком широким, как показывает следующий пример. Пусть $\mathcal{E}$ — прямая линия. Положим

$$\mathbf{P}(t, x, \Gamma) = \begin{cases} \dfrac{1}{\sqrt{2\pi t}} \displaystyle\int_{\Gamma} e^{-\frac{(x-y)^2}{2t}} dy, & \text{если } x \neq 0, \\ 1, & \text{если } x = 0, \quad x \in \Gamma, \\ 0, & \text{если } x = 0, \quad x \overline{\in} \Gamma. \end{cases}$$

Эта функция определяет однородный по времени марковский процесс с непрерывными траекториями, обладающий весьма парадоксальными свойствами: если частица начинает свое движение не из нуля, то она движется как обычная броуновская частица и проходит, в частности, через 0 так же, как и через любую другую точку; если же движение начинается из 0, то частица никуда из нуля не выйдет.

Ясно, что такие патологические примеры никак не соответствуют физическим представлениям о марковских процессах. Чтобы исключить возможность подобных странностей, мы введем некоторое условие, выражающее понимаемую более широко, чем обычно, независимость «будущего» от «прошлого» при фиксированном «настоящем».

3. Пусть $\tau = \tau(\omega)$ — случайная величина, принимающая неотрицательные значения (допускается значение $+\infty$). Условимся говорить, что τ не зависит от будущего, если при любом $s \geqslant 0$ множество $\{\tau(\omega) \leqslant s\}$ принадлежит σ-алгебре $\mathfrak{M}_s$. Множества $A \in \mathfrak{M}$ такие, что при любом $s \geqslant 0$ $A \cap \{\tau(\omega) \leqslant s\} \in \mathfrak{M}_s$ образуют σ-алгебру $\mathfrak{M}_\tau$. Условные вероятности относительно $\mathfrak{M}_\tau$ мы будем называть условными вероятностями при заданном течении процесса $x(s)$ для $s \leqslant \tau$:

$$\mathbf{P}\{C \mid x(s)_{s \leqslant \tau}\} = \mathbf{P}\{C \mid \mathfrak{M}_\tau\}.$$

Будем обозначать через Ω_τ множество всех $\omega \in \Omega$, для которых $\tau < +\infty$.

Определение. Измеримый** случайный процесс в пространстве $\mathcal{E}$ мы назовем *строго марковским однородным по времени процессом*, если, каковы бы ни были $\Gamma_1, \dots, \Gamma_n \in \mathfrak{B}$, $0 < t_1 < \dots < t_n$ и не зависящая от будущего случайная величина τ, для почти всех $\omega \in \Omega_\tau$

$$\mathbf{P}\{x(\tau+t_1) \in \Gamma_1, \dots, x(\tau+t_n) \in \Gamma_n \mid x(u)_{u \leqslant \tau}\} = \mathbf{P}_{x(\tau)}\{x(t_1) \in \Gamma_1, \dots, x(t_n) \in \Gamma_n\}. \tag{5}$$

---

* Определение и свойства условных вероятностей и условных математических ожиданий относительно системы случайных величин или относительно σ-алгебры множеств см. в [1] и [3]. В тех случаях, когда $P_x(A \mid B)$ не зависит от x, индекс x мы будем опускать.

** Случайный процесс называется измеримым, если при любом $A \in \mathfrak{B}$ множество пар (t, ω), для которых $x(t, \omega) \in A$, принадлежит $\mathfrak{B}' \cdot \mathfrak{M}$, где $\mathfrak{B}'$ обозначает σ-алгебру всех борелевских множеств на полупрямой $0 \leqslant t < +\infty$.

Поскольку постоянная s есть случайная величина, не зависящая от будущего, то из (5) вытекает (4) и, следовательно, всякий строго марковский процесс является марковским. Примером марковского процесса, который не является строго марковским, может служить процесс, построенный в $n°2$: условие (5) не выполняется для случайной величины «момент первого попадания в точку 0», хотя эта величина, очевидно, не зависит от будущего. Выяснение условий, при которых марковский процесс является строго марковским, и составляет задачу настоящей работы.

4. В § 2 мы докажем следующее необходимое и достаточное условие строгой марковости.

Теорема 1. *Для того чтобы однородный по времени марковский процесс был строго марковским, необходимо и достаточно, чтобы для любых* $x \in \mathcal{E}$, $t > 0$, $\Gamma \in \mathfrak{B}$

$$\mathbf{P}_x\{x(\tau + t) \in \Gamma\} = \int_{\mathcal{E}} \mathbf{P}(t, y, \Gamma)\, \Pi_x(dy), \tag{6}$$

где $\Pi_x(\Gamma) = \mathbf{P}_x\{x(\tau) \in \Gamma\}$.

Условию (6) можно придать алгебраическую форму. Обозначим через B банаховское пространство всех ограниченных $\mathfrak{B}$-измеримых функций на $\mathcal{E}$ с нормой $\|f(x)\| = \sup_{x \in \mathcal{E}} |f(x)|$. Рассмотрим в B ограниченный линейный оператор T_τ, определенный формулой

$$T_\tau f(x) = \mathbf{M}_x f(x(\tau)) = \int_{\Omega_\tau} f(x(\tau(\omega), \omega))\, \mathbf{P}_x(d\omega) \quad (f \in B). \tag{7}$$

Теорема 1′. *Для того чтобы однородный по времени марковский процесс был строго марковским, необходимо и достаточно, чтобы для любой случайной величины* τ, *не зависящей от будущего, и любой постоянной* $t \geqslant 0$

$$T_{\tau + t} = T_\tau T_t. \tag{8}$$

Мы будем называть процесс *феллеровским**, если пространство C всех непрерывных ограниченных функций на $\mathcal{E}$ инвариантно относительно операторов T_t $(t \geqslant 0)$. Процесс $x(t, \omega)$ называется непрерывным справа, если при любом $\omega \in \Omega$ функция $x(t, \omega)$ есть непрерывная справа функция от t.

Теорема 2.** *Все непрерывные справа феллеровские марковские процессы являются строго марковскими.*

Теорема 2 будет доказана в § 3.

§ 2. Доказательство теорем 1 — 1′

5. Если процесс строго марковский, то

$$\mathbf{P}_x\{x(\tau + t) \in \Gamma\} = \int_\Omega \mathbf{P}\{x(\tau + t) \in \Gamma \mid x(s)_{s \leqslant \tau}\}\, \mathbf{P}_x(d\omega) =$$

$$= \int_\Omega \mathbf{P}_{x(\tau)}\{x(t) \in \Gamma\}\, \mathbf{P}_x(d\omega) = \int_\Omega \mathbf{P}(t, x(\tau), \Gamma)\, \mathbf{P}_x(d\omega) = \int_{\mathcal{E}} \mathbf{P}(t, y, \Gamma)\, \Pi_x(dy),$$

так что условие (6) необходимо для строгой марковости.

Лемма 1. *Пусть* τ*—случайная величина, не зависящая от будущего. Если* $\tau' \geqslant \tau$ *и* τ' *есть измеримая по Борелю функция от* τ, *то* τ' *также не зависит от будущего.*

---

* Такие процессы подробно изучались В. Феллером в [2].

** В работе [5] доказан сходный результат для однородных марковских процессов со счетным числом состояний: для всякого стохастически непрерывного марковского процесса существует стохастически эквивалентный строго марковский процесс. При этом, однако, в определении не зависящей от будущего величины τ нужно дополнительно предположить, что $x(\tau, \omega)$ принимает несобственное значение ∞ с вероятностью 0.

Доказательство. Множество $\{\tau'(\omega) \leqslant s\}$ совпадает с множеством $\{\tau(\omega) \in B(s)\}$, где $B(s)$ состоит из тех значений τ, при которых $\tau' \leqslant s$. Поскольку $B(s)$ измеримо по Борелю и лежит целиком на отрезке $[0, s]$, множество $\{\tau(\omega) \in B(s)\}$ содержится в σ-алгебре $\mathfrak{M}_s$.

Лемма 2. *Если выполнено условие* (6) *и* τ*—любая величина, не зависящая от будущего, то, каковы бы ни были* $t > 0$, $\Gamma \in \mathfrak{B}$ *для почти всех* $\omega \in \Omega_\tau$

$$\mathbf{P}\{x(\tau + t) \in \Gamma \mid x(u)_{u \leqslant \tau}\} = \mathbf{P}(t, x(\tau), \Gamma). \tag{9}$$

Доказательство. Соотношение (9) означает, что если $A \in \mathfrak{M}_\tau$ и $\tau(\omega) < +\infty$ для всех $\omega \in A$, то

$$\mathbf{P}_x\{A, x(\tau + t) \in \Gamma\} = \int_A \mathbf{P}(t, x(\tau, \omega), \Gamma)\, \mathbf{P}_x(d\omega). \tag{10}$$

Положим

$$\tau'(\omega) = \begin{cases} \tau(\omega), & \text{если } \omega \in A, \\ +\infty, & \text{если } \omega \overline{\in} A. \end{cases}$$

Легко видеть, что τ' не зависит от будущего. В силу условия (6)

$$\mathbf{P}_x\{x(\tau' + t) \in \Gamma\} = \int_{\mathcal{E}} \mathbf{P}(t, y, \Gamma)\, \Pi'_x(dy), \tag{11}$$

где

$$\Pi'_x(\Gamma') = \mathbf{P}_x\{x(\tau') \in \Gamma'\} = \mathbf{P}_x\{A, x(\tau) \in \Gamma'\}.$$

С другой стороны, $\mathbf{P}_x\{x(\tau' + t) \in \Gamma\} = \mathbf{P}_x\{A, x(\tau + t) \in \Gamma\}$. Поэтому (11) равносильно (10).

6. Докажем теперь, что если выполнено условие (6), то процесс является строго марковским. Для этого надо показать, что для любой случайной величины τ, не зависящей от будущего, любого множества C вида $C = \{x(t_1) \in \Gamma_1, \ldots, x(t_n) \in \Gamma_n\}$, любого $x \in \mathcal{E}$ и любого $A \in \mathfrak{M}_\tau$ такого, что $\tau(\omega) < +\infty$ для $\omega \in A$, имеет место соотношение

$$\mathbf{P}_x(AC_\tau) = \int_A \mathbf{P}_{x(\tau)}(C)\, \mathbf{P}_x(d\omega), \tag{12}$$

где $C_\tau = \{x(\tau + t_1) \in \Gamma_1, \ldots, x(\tau + t_n) \in \Gamma_n\}$.

При $n = 1$ это следует из леммы 2. Предположим, что это уже доказано для $n - 1$, и заметим, что

$$AC_\tau = A'C'_{\tau + t_1}, \tag{13}$$

где $A' = \{A, x(\tau + t_1) \in \Gamma_1\}$, $C'_{\tau + t_1} = \{x(\tau + t_2) \in \Gamma_2, \ldots, x(\tau + t_n) \in \Gamma_n\}$.

Поскольку случайная величина $\tau + t_1$ не зависит от будущего (см. лемму 1), $A' \in \mathfrak{M}_{\tau + t_1}$ и $\tau(\omega) + t_1 < +\infty$ на A', то по предположению индукции

$$\mathbf{P}_x(A'\, C'_{\tau + t_1}) = \int_{A'} \mathbf{P}_{x(\tau + t_1)}(C')\, \mathbf{P}_x(d\omega), \tag{14}$$

где $C' = \{x(t_2 - t_1) \in \Gamma_2, \ldots, x(t_n - t_1) \in \Gamma_n\}$. Положим

$$\Pi'_x(\Gamma) = \mathbf{P}_x\{A, x(\tau + t_1) \in \Gamma\} = \int_A \mathbf{P}\{x(\tau + t_1) \in \Gamma \mid x(u)_{u \leqslant \tau}\}\, \mathbf{P}_x(d\omega). \tag{15}$$

В силу (10)

$$\Pi'_x(\Gamma) = \int_A \mathbf{P}(t_1, x(\tau), \Gamma)\, \mathbf{P}_x(d\omega). \tag{16}$$

Заметим теперь, что

$$\int_{A'} \mathbf{P}_{x(\tau + t_1)}(C')\, \mathbf{P}_x(d\omega) = \int_{\Gamma_1} \mathbf{P}_y(C')\, \Pi'_x(dy). \tag{17}$$

Из (13), (14), (16) и (17) следует, что

$$\mathbf{P}_x(AC_\tau) = \iint_{\Gamma_1 A} \mathbf{P}_y(C')\, \mathbf{P}(t_1, x(\tau), dy)\, \mathbf{P}_x(d\omega). \tag{18}$$

Но в силу (2)

$$\int_{\Gamma_1} \mathbf{P}(t_1, x(\tau), dy)\, \mathbf{P}_y(C') = \mathbf{P}_{x(\tau)}(C). \qquad (19)$$

Из (18) и (19) вытекает (12). Теорема 1 доказана полностью.

7. Докажем равносильность условий (6) и (8).

Условие (8) можно расшифровать следующим образом: если $f \in B$, $g(x) = \mathbf{M}_x f(x(t))$, $F(x) = \mathbf{M}_x g(x(\tau))$, то

$$F(x) = \mathbf{M}_x f(x(\tau + t)). \qquad (20)$$

Полагая

$$f(x) = \begin{cases} 1, & \text{если } x \in \Gamma, \\ 0, & \text{если } x \overline{\in} \Gamma, \end{cases}$$

имеем

$$g(x) = \mathbf{P}_x\{x(t) \in \Gamma\} = \mathbf{P}(t, x, \Gamma)$$

$$F(x) = \mathbf{M}_x \mathbf{P}(t, x(\tau), \Gamma) = \int_{\mathfrak{S}} \mathbf{P}(t, y, \Gamma)\, \Pi_x(dy),$$

и соотношение (20) переходит в (6). Итак, из (8) следует (6).

Выведем теперь (8) из (6). Имеем

$$\mathbf{M}_x f(x(\tau + t)) = \int_{\mathfrak{S}} f(z)\, \Pi'_x(dz),$$

где

$$\Pi'_x(\Gamma) = \mathbf{P}_x\{x(\tau + t) \in \Gamma\} = \int_{\mathfrak{S}} \mathbf{P}(t, y, \Gamma)\, \Pi_x(dy).$$

Отсюда

$$\mathbf{M}_x f(x(\tau + t)) = \iint_{\mathfrak{S}\mathfrak{S}} f(z)\, \mathbf{P}(t, y, dz)\, \Pi_x(dy) = \int_{\mathfrak{S}} g(y)\, \Pi_x(dy) = \mathbf{M}_x g(x(\tau)) = F(x).$$

§ 3. Доказательство теоремы 2

8. Положим

$$T_t f(x) = \mathbf{M}_x f(x(t)) = g(x) \quad (f \in B).$$

Прежде всего заметим, что для любого марковского процесса в силу (4)

$$\mathbf{M}[f(x(s + t)) \mid x(u)_{u \leqslant s}] = M_{x(s)} f(x(t)) = g(x(s)). \qquad (21)$$

Пусть τ не зависит от будущего. Тогда при любом s множество $\{\tau(\omega) = s\}$ принадлежит σ-алгебре $\mathfrak{M}_s$. Поэтому функция

$$\chi(\omega) = \begin{cases} 1, & \text{если } \tau(\omega) = s, \\ 0, & \text{если } \tau(\omega) \neq s, \end{cases}$$

измерима относительно $\mathfrak{M}_s$.

Используя формулу полного математического ожидания и (21), имеем

$$\int_{\tau = s} f(x(s + t, \omega))\, \mathbf{P}_x(d\omega) = \mathbf{M}_x \chi(\omega) f(x(s + t, \omega)) =$$

$$= \mathbf{M}_x \mathbf{M}[\chi f(x(s + t)) \mid x(u)_{u \leqslant s}] = \mathbf{M}_x\{\chi \mathbf{M}[f(x + t)) \mid x(u)_{u \leqslant s}]\} =$$

$$= \mathbf{M}_x[\chi g(x(s))] = \int_{\tau = s} g(x(s))\, \mathbf{P}_x(s)\, \mathbf{P}_x(d\omega). \qquad (22)$$

Предположим сперва, что τ принимает лишь счетное число значений: $s_1, s_2, \ldots$.

Тогда в силу (22)

$$T_{\tau+t} f(x) = \int_{\Omega_\tau} f(x(\tau+t))\,\mathbf{P}_x(d\omega) = \sum_k \int_{\tau=s_k} f(x(s_k+t))\,\mathbf{P}_x(d\omega) =$$

$$= \sum_k \int_{\tau=s_k} g(x(s_k))\,\mathbf{P}_x(d\omega) = \sum_k \int_{\tau=s_k} g(x(\tau))\,\mathbf{P}_x(d\omega) = \int_{\Omega_\tau} g(x(\tau))\,\mathbf{P}_x(d\omega) =$$

$$= T_\tau g(x) = T_\tau T_t f(x),$$

и формула (8) для этого случая доказана.

9. Пусть теперь τ—любая случайная величина, не зависящая от будущего. Положим $\tau_n(\omega) = \frac{k+1}{n}$, если $\frac{k}{n} < \tau(\omega) \leqslant \frac{k+1}{n}$. В силу леммы 1 величина τ_n не зависит от будущего. Она принимает лишь счетное число значений и поэтому

$$T_{\tau_n+t} f(x) = T_{\tau_n} T_t f(x) \tag{23}$$

для всякого $f \in B$.

Предположим теперь, что процесс феллеровский и непрерывный справа, и пусть $f \in C$. Тогда g также принадлежит C. При $n \to \infty$

$$\tau_n \to \tau + 0, \quad \tau_n + t \to \tau + t + 0.$$

Следовательно, $x(\tau_n) \to x(\tau)$, $x(\tau_n + t) \to x(\tau + t)$,

$$g(x(\tau_n)) \to g(x(\tau)), \quad f(x(\tau_n + t)) \to f(x(\tau + t)),$$

и поскольку все эти функции равномерно ограничены, то

$$\mathbf{M}_x g(x(\tau_n)) \to \mathbf{M}_x g(x(\tau)), \quad \mathbf{M}_x f(x(\tau_n + t)) \to \mathbf{M}_x f(x(\tau + t)),$$

т. е. $$T_{\tau_n} g(x) \to T_\tau g(x), \quad T_{\tau_n+t} f(x) \to T_{\tau+t} f(x).$$

Переходя к пределу в соотношении (23), получаем

$$T_{\tau+t} f = T_\tau T_t f \quad (f \in C). \tag{24}$$

Заметим теперь, что для любой случайной величины τ и любой последовательности $f_n \in B$

$$w \lim T_\tau f_n = T_\tau (w \lim f_m),$$

причем оба предела существуют или не существуют одновременно (мы пишем $f = w \lim f_n$, если $f_n(x) \to f(x)$ для любого $x \in \mathcal{E}$ и $\| f_n \|$ ограничены). Поэтому если $f = w \lim f_n$ и соотношение (24) выполнено для последовательности функций f_n, то оно выполнено и для функции f. Поскольку уже доказано, что (24) справедливо для всех функций из C, то оно справедливо и для всех функций из B (ибо наименьшее множество функций, замкнутое относительности сходимости (w) и содержащее все непрерывные ограниченные функции, совпадает с B; см., напр., [4], стр. 249). В силу теоремы 1′ процесс является строго марковским.

Поступила в редакцию
14.12.55

ЛИТЕРАТУРА

[1] J. L. Doob, Stochastic Processes, New York, 1953.
[2] W. Feller, The general diffusion operator and positivity preserving semi-groups in one dimension, Annals of Math., 60 : 3 (1954), 417—436.
[3] А. Н. Колмогоров, Основные понятия теории вероятностей, М., 1936.
[4] Ф. Хаусдорф, Теория множеств, М., 1937.
[5] А. А. Юшкевич, О дифференцируемости переходных вероятностей однородного марковского процесса со счетным числом состояний, Ученые записки МГУ, т. 9, вып. 186, 1956.

STRONG MARKOV PROCESSES

By E. DYNKIN and A. JUSHKEVICH (MOSCOW)

(Summary)

Let $\mathcal{E}$ be a metric space, and suppose that $\mathfrak{B}$ is the Borel field generated by the open sets of $\mathcal{E}$. A stochastic process is defined on $\mathcal{E}$ if a function $x(t, \omega)$, $(0 \leqslant t < \infty$, $\omega \in \Omega)$ and a system of probability measures $\mathbf{P}_x (x \in \mathcal{E})$ are given such that all $\mathbf{P}_x$ are defined on the Borel field generated by sets of type (1), and $\mathbf{P}_x \{x(0, \omega) = x\} \equiv 1$. A random variable $\tau(\omega)$ is said to be independent of the future if for every s the ω-set $\{\tau(\omega) \leqslant s\}$ belongs to the Borel field generated by sets of type (1) with $t \leqslant s$. A measurable stochastic process on $\mathcal{E}$ is called a strong Markov homogeneous process if for any $\Gamma_1, \ldots, \Gamma_n \in \mathfrak{B}$, $0 < t_1 < t_2 < \ldots < t_n$ and any τ independent of the future, equation (5) is true for almost all ω such that $\tau(\omega) < \infty$. Every strong Markov homogeneous process is a Markov homogeneous process, but the converse is not true as shown by examples. The process is said to be a Feller process, if the space C of all bounded continuous functions on $\mathcal{E}$ is invariant under transformations T_t, $(t \geqslant 0)$ defined by (7). It is proved that if a homogeneous Markov process is of the Feller type and if $x(t, \omega)$ or all ω is a right-continuous function of t, then the process is a strong Markov process.

СЛАБАЯ СХОДИМОСТЬ СЛУЧАЙНЫХ ПРОЦЕССОВ С ТРАЕКТОРИЯМИ БЕЗ РАЗРЫВОВ ВТОРОГО РОДА И ТАК НАЗЫВАЕМЫЙ «ЭВРИСТИЧЕСКИЙ» ПОДХОД К КРИТЕРИЯМ СОГЛАСИЯ ТИПА КОЛМОГОРОВА — СМИРНОВА *

Н. Н. ЧЕНЦОВ

В 1934 г. А. Н. Колмогоров доказал следующую теорему: Если $\xi(t)$ — сепарабельный (см. [1]) случайный процесс,

$$\mathbf{M} \mid \xi(t_1) - \xi(t_2) \mid^p < C \mid t_1 - t_2 \mid^{1+r}, \tag{1}$$

где $p > 0$, $r > 0$, C — константа, не зависящая от t, то с вероятностью 1 все траектории процесса непрерывны **.

Обобщением этой теоремы является следующее предложение, указанное автору А. Н. Колмогоровым:

Теорема 1: *Если $\xi(t)$ — сепарабельный случайный процесс $0 \leqslant t \leqslant 1$ и*

$$\mathbf{M} \mid \xi(t_1) - \xi(t_2) \mid^p \mid \xi(t_2) - \xi(t_3) \mid^q < C \mid t_1 - t_3 \mid^{1+r}, \tag{2}$$

где $p \geqslant 0$, $q \geqslant 0$; $r > 0$; $t_1 < t_2 < t_3$, C — константа, не зависящая от t, то с вероятностью 1 все траектории процесса не имеют разрывов второго рода.

Доказательство: Нетрудно показать, что если для $\xi(t)$ выполнено (2), в качестве множества сепарабельности можно выбрать любое счетное всюду плотное множество, например множество Γ_0 двоично-рациональных дробей. Назовем событие $\left| \xi\left(\frac{k}{2^n}\right) - \xi\left(\frac{k+1}{2^n}\right) \right| < L\alpha^n$, где $\alpha = \exp\left[-\frac{r \ln 2}{2(p+q)}\right]$, $L^{p+q} = C$, событием $A^n_{k+\frac{1}{2}}$. Введем также события $B^n_k = A^n_{k-\frac{1}{2}} \cup A^n_{k+\frac{1}{2}}$, события $D^n = \bigcap_{m=n}^{\infty} \bigcap_{k=1}^{2^m-1} B^m_k$ и событие $D = \bigcup_{n=1}^{\infty} D^n$.

Из неравенства (2) легко выводится, что $\mathbf{P}\{\overline{B}^n_k\} < \alpha^{-n(p+q)} 2^{-n(1+r)}$; $\mathbf{P}\{\overline{D}^n\} <$

---

* Краткое изложение содержания настоящей заметки (без теоремы 1) было сделано автором на Всесоюзном совещании по теории вероятностей и математической статистике, происходившем в Ленинграде 30 мая — 4 июня 1955 г.

** Эта теорема была впервые опубликована в работе Е. Е. Слуцкого [2].

$< \frac{\varepsilon^n}{1-\varepsilon}$, где $\varepsilon = 2^{-\frac{1}{r}} < 1$, и, наконец, $\mathbf{P}\{D\} = 1$. Остается показать, что множество D не содержит ни одной Γ_0-сепарабельной траектории с разрывами второго рода

Лемма 1. *Если* $x(t) - \Gamma_0$*-сепарабельная функция и* $x(t) \in A^n_{k+\frac{1}{2}} \cap D^{n+1}$, *то*

$$\max_{\frac{k}{2^n} < t < \frac{k+1}{2^n}} \left| x(t) - x\left(\frac{1}{2^n}\right) \right| < \frac{L\alpha^n}{1-\alpha}, \tag{3}$$

$$\max_{\frac{k}{2^n} < t < \frac{k+1}{2^n}} \left| x(t) - x\left(\frac{k+1}{2^n}\right) \right| < \frac{L\alpha^n}{1-\alpha}. \tag{4}$$

Доказательство леммы. Так как $x(t) - \Gamma_0$-сепарабельная функция, то утверждение леммы достаточно показать для двоично-рациональных t.
Пусть по предположению индукции

$$\left| x\left(\frac{S}{2^{n+m}}\right) - x\left(\frac{k}{2^n}\right) \right| < L(\alpha^n + \alpha^{n+1} + \ldots + \alpha^{n+m}), \tag{5}$$

$$\left| x\left(\frac{S}{2^{n+m}}\right) - x\left(\frac{k+1}{2^n}\right) \right| < L(\alpha^n + \alpha^{n+1} + \ldots + \alpha^{n+m}). \tag{6}$$

Так как $x(t) \in D^{n+1}$, то имеет место по крайней мере одно из неравенств (7) или (8)

$$\left| x\left(\frac{2S+1}{2^{n+m+1}}\right) - x\left(\frac{S}{2^{n+m}}\right) \right| < L\alpha^{n+m+1} \tag{7}$$

$$\left| x\left(\frac{2S+1}{2^{n+m+1}}\right) - x\left(\frac{S}{2^{n+m}}\right) \right| < L\alpha^{n+m+1}. \tag{8}$$

В обоих случаях

$$\left| x\left(\frac{2S+1}{2^{n+m+1}}\right) - x\left(\frac{k}{2^n}\right) \right| < L(\alpha^n + \alpha^{n+1} + \ldots + \alpha^{n+m+1}) \tag{9}$$

$$\left| x\left(\frac{2S+1}{2^{n+m+1}}\right) - x\left(\frac{k+1}{2^n}\right) \right| < L(\alpha^n + \alpha^{n+1} + \ldots + \alpha^{n+m+1}). \tag{10}$$

Дальнейшие рассуждения тривиальны.

Лемма 2. *Если* $x(t) - \Gamma_0$*-сепарабельная функция и* $x(t) \in B^n_k \cap D^{n+1}$, *то в интервале* $\left[\frac{k-1}{2^n}, \frac{k+1}{2^n}\right]$ *существует точка* t^n_k, *задающая дедекиндово сечение интервала так, что*

$$\left| x(t) - x\left(\frac{k-1}{2^n}\right) \right| < \frac{L\alpha^n}{1-\alpha}, \tag{11}$$

если t *принадлежит нижнему классу, и*

$$\left| x(t) - x\left(\frac{k+1}{2^n}\right) \right| < \frac{L\alpha^n}{1-\alpha}, \tag{12}$$

если t *принадлежит верхнему классу.*

Доказательство леммы 2. Всегда имеет место одно из неравенств (13) или (14)

$$\left| x\left(\frac{k}{2^n}\right) - x\left(\frac{k-1}{2^n}\right) \right| < L\alpha^n, \tag{13}$$

$$\left| x\left(\frac{k}{2^n}\right) - x\left(\frac{k+1}{2^n}\right) \right| < L\alpha^n. \tag{14}$$

В случае, когда выполнены оба неравенства, утверждение леммы 2 тривиально следует из леммы 1. Пусть выполнено только первое неравенство. Тогда из леммы 1 следует, что для всех $t \in \left[\frac{k-1}{2^n}, \frac{k}{2^n}\right]$ выполнено неравенство (11), поэтому отрезок $\left[\frac{k-1}{2^n}, \frac{k}{2^n}\right]$ принадлежит нижнему классу. Для отрезка $\left[\frac{k}{2^n}, \frac{k+1}{2^n}\right]$ имеем

$$\left|x\left(\frac{k}{2^n}\right) - x\left(\frac{k-1}{2^n}\right)\right| < L\alpha^n, \tag{15}$$

$$\left|x\left(\frac{k+1}{2^n}\right) - x\left(\frac{k+1}{2^n}\right)\right| < L\alpha^n. \tag{16}$$

Отрезок $\left[\frac{k}{2^n}, \frac{k+1}{2^n}\right]$ разбиваем пополам. Для одной из половинок имеем $\left|x\left(\frac{S}{2^{n+1}}\right) - x\left(\frac{S+1}{2^{n+1}}\right)\right| < L\alpha^{n+1}$, где $S = 2k$ или $S = 2k+1$. Из леммы 1 и одного из неравенств (15) или (16) получаем, что все эти точки $\left[\frac{S}{2^{n+1}}, \frac{S+1}{2^{n+1}}\right]$ принадлежат одному классу. Для второй половины отрезка получаем оценки

$$x\left(\frac{S'}{2^{n+1}}\right) - x\left(\frac{k-1}{2^n}\right)\Big| < L(\alpha^n + \alpha^{n+1}) \text{ и } \left|x\left(\frac{k+1}{2^n}\right)x - \left(\frac{k+1}{2^n}\right)\right| < L(\alpha^n + \alpha^{n+1}),$$

где $S' = 2k+1$, если $S = 2k$, или $S' = 2k$, если $S = 2k+1$. Рассуждая далее по индукции, получаем утверждение леммы.

Переходим к доказательству теоремы. Пусть $x(t)$ — функция с разрывами второго рода и $x(t) \in D$. Тогда при некотором n, $x(t) \in D^n$ и, следовательно, $x(t) \in D^m$ при всех $m \geqslant n$. Если Γ_0-сепарабельная функция $x(t)$ имеет разрывы второго рода, то существует такое $\eta > 0$, что для любого $\delta > 0$ найдутся три точки $t_1 < t_2 < t_3$ $|t_1 - t_3| < \delta$; $t_1, t_2, t_3 \in \Gamma_0$ такие, что $|x(t_1) - x(t_2)| > \eta$ и $|x(t_2) - x(t_3)| > \eta$.

Выберем m так, чтобы $2L\frac{\alpha^m}{1-\alpha} > \eta$. Без ограничения общности можно считать $m \geqslant n$. Выберем $\delta < \frac{1}{2^m}$. Тогда отрезок $[t_1, t_3]$ заведомо покрывается двумя смежными отрезками длины $\frac{1}{2^m}$ $\left[\frac{k-1}{2^m}, \frac{k}{2^m}\right]$ и $\left[\frac{k}{2^m}, \frac{k+1}{2^m}\right]$. При этом или t_1 и t_2, или t_2 и t_3, или и t_1 и t_2 и t_3 попадают в один класс. Так как $x(t) \in B_k^m \cap D^{m+1}$, то по следствию из леммы 2 одна из разностей обязательно меньше $2L\frac{\alpha^m}{1-\alpha}$, что противоречит неравенству $2L\frac{\alpha^m}{1-\alpha} < \eta$. Это противоречие доказывает теорему.

Будем говорить, что последовательность случайных процессов $\xi_n(t)$ слабо сходится к некоторому предельному случайному процессу $\xi_0(t)$, если при любом фиксированном множестве моментов времени $t_1, t_2, \ldots, t_m$ последовательность совместных распределений величин $\xi_n(t_1), \ldots, \xi_n(t_m)$ слабо сходится к соответствующему совместному распределению значений $\xi_0(t)$, $i = 1, \ldots, m$ предельного процесса.

Теорема 2. *Если последовательность сепарабельных случайных процессов $\xi_n(t)$ слабо сходится к сепарабельному случайному процессу $\xi_0(t)$, причем выполнено условие*

$$\mathbf{M}\,|\xi_n(t_1) - \xi_n(t_2)|^p\,|\xi_n(t_2) - \xi_n(t_3)|^q < C\,|t_1 - t_3|^{1+r}, \tag{17}$$

где $p \geqslant 0$, $q \geqslant 0$; $r > 0$; $t_1 < t_2 < t_3$; C — константа, не зависящая от n и t; и две кусочно-непрерывные функции $g(t) < f(t)$, полунепрерывные в точках разрыва соответственно сверху и снизу таковы, что

$$\mathbf{P}\{g(t) + z \leqslant \xi_0(t) \leqslant f(t) - z; \text{ при всех } t\} \xrightarrow[z \to +0]{} \mathbf{P}\{g(t) \leqslant \xi_0(t) \leqslant f(t); \text{ при всех } t\} \tag{18}$$

то

$$\mathbf{P}\{g(t)\leqslant\xi_n(t)\leqslant f(t);\ \textit{при всех}\ t\}\xrightarrow[n\to\infty]{}\mathbf{P}\{g(t)\leqslant\xi_0(t)\leqslant f(t);\ \textit{при всех}\ t\}. \quad (19)$$

Доказательство: Если процесс $\xi(t)$ — сепарабельный то (см. [1])

$$\mathbf{P}\{g(t)\leqslant\xi(t)\leqslant f(t);\ \text{при всех}\ t\in T\}=\inf_{\Gamma}\mathbf{P}\{g(t)\leqslant\xi(t)\leqslant f(t);\ \text{при всех}\ t\in T\}, \quad (20)$$

где Γ — любое счетное подмножество T и $g(t)<f(t)$ — любые кусочно-непрерывные функции. Под T, для определенности, будем понимать отрезок оси t. Пусть счетное всюду плотное множество Γ_0 содержит все точки разрыва функций $d(t)$ и $f(t)$. Нетрудно показать, что если для $\xi(t)$ выполнено условие (17), то на Γ_0 достигается $\inf_{\Gamma}\mathbf{P}\{g(t)\leqslant\xi(t)\leqslant f(t);\ \text{при всех}\ t\in\Gamma\}$. В самом деле, из (17) следует, что от увеличения Γ_0 на любое конечное, а значит, и счетное число точек эта вероятность не будет уменьшаться. Так как, очевидно, условие (17) имеет место и для предельного процесса $\xi_0(t)$, то нам достаточно показать, что

$$\mathbf{P}\{g(t)\leqslant\xi_n(t)\leqslant f(t);\ \text{при всех}\ t\in\Gamma_0\}\xrightarrow[n\to\infty]{}$$

$$\to\mathbf{P}\{g(t)\leqslant\xi_0(t)\leqslant f(t);\ \text{при всех}\ t\in\Gamma_0\}. \quad (21)$$

Выберем Γ_0 следующим специальным образом: Пусть Δ_0 состоит из точек разрыва функции $g(t)$ и $f(t)$ и концов отрезка T оси t. Пусть Δ_1 состоит из всех точек Δ_0 и всех точек вида $\frac{t_{i+1}^{(0)}+t_i^{(0)}}{2}$, где $t_i^{(0)}$ — упорядоченные в порядке возрастания точки Δ_0. Пусть Δ_2 состоит из всех точек Δ_1 и всех точек вида $\frac{t_{i+1}^{(1)}+t_i^{(1)}}{2}$, где $t_i^{(1)}$ — упорядоченные в порядке возрастания точки Δ_1 и т. д. Положим, наконец, $\Gamma_0=\bigcup_{k=1}^{\infty}\Delta_k$.

Обозначим для краткости событие

$$\{g(t)\leqslant\xi(t)\leqslant f(t);\ \text{при всех}\ t\in A\}=\mathbf{U}(\xi,\ g,\ f,\ A). \quad (22)$$

Тогда (21) можно переписать в виде

$$\mathbf{P}\{\mathbf{U}(\xi_n,\ g,\ f,\ \Gamma_0)\}\xrightarrow[n\to\infty]{}\mathbf{P}\{\mathbf{U}(\xi_0,\ g,\ f,\ \Gamma_0)\}. \quad (23)$$

Пусть $g(t)$ и $f(t)$ — ступенчатые функции. Тогда имеет место

Лемма: *Если для $\xi(t)$ выполнено условие* (17), *то при* $\varepsilon\geqslant\frac{1}{1-\alpha}\,\alpha^k$

$$\mathbf{P}\{\mathbf{U}(\xi,\ g,\ f,\ \Delta_k)\}\leqslant\mathbf{P}\{\mathbf{U}\xi,\ g-\varepsilon,f+\varepsilon,\Gamma_0)\}+\eta, \quad (24)$$

где $h=\max_i|t_{i+1}^{(0)}-t_i^{(0)}|$; $\alpha=\exp\left[-\frac{r\ln 2}{2(p+q)}\right]<1$; $\eta\leqslant C\,|T|\cdot h^r\,\frac{1}{1-\alpha^{p+q}}\,\alpha^{(p+q)k}$

Доказательство леммы: Нетрудно проверить, что из (17) следует

$$\mathbf{P}\{\xi(t_i^{(l)})\in[a,\ b];\ \xi(t_{i+1}^{l})\in[a,\ b];\ \xi(t_{2i}^{(l+1)})\in[a-\varepsilon,\ b+\varepsilon]\}\leqslant\frac{C\,|t_{i+1}^{(l)}-t_i^{(l)}|^{1+r}}{\varepsilon^{p+q}}. \quad (25)$$

В силу полунепрерывности $g(t)$ и $f(t)$ в точках разрыва, можно подставить в (25) вместо a величину $g(t_{2i}^{(l+1)})-\varepsilon_l$ и $f(t_{2i}^{(l+1)})+\varepsilon_l$ вместо b, где $\varepsilon_l=\alpha^k+\alpha^{k+1}+\ldots+\alpha^{l+1}$. Суммируя затем по всем i, получаем

$$\mathbf{P}\{\mathbf{U}(\xi,\ g-\varepsilon_l,\ f+\varepsilon_l,\ \Delta_l)\}\leqslant\mathbf{P}\{\mathbf{U}(\xi,\ g-\varepsilon_{l+1},\ f+\varepsilon_{l+1},\ \Delta_{l+1})\}+\eta_l, \quad (26)$$

где $\eta_l\leqslant Ch^r\,|T|\,\alpha^{(p+q)\,l}$. Суммируя выражения (26) для всех $l\geqslant k$ и учитывая, что от увеличения ε неравенство только усиливается, получаем (24). Из леммы следует, что для любых $\varepsilon>0$ и $\eta>0$ найдется такое k, зависящее только от C, $h\,|T|\,p$, q, r, что неравенство (24) будет выполнено с этими ε и η.

Вернемся к доказательству теоремы. Выберем произвольное $\eta > 0$ и покажем, что

$$\overline{\lim_{n\to\infty}} \mathbf{P}\{\mathbf{U}(\xi_n, g, f, \Gamma_0)\} < \mathbf{P}\{\mathbf{U}(\xi_0, g, f, \Gamma_0)\} + \eta. \tag{27}$$

Так как $\mathbf{U}(\xi, g, f, \Gamma_0) = \bigcap_{k=1}^{\infty} \mathbf{U}(\xi, g, f, \Delta_k)$, то можно выбрать k таким, что

$$\mathbf{P}\{\mathbf{U}(\xi_0, g, f, \Delta_k)\} < \mathbf{P}\{\mathbf{U}(\xi_0, g, f, \Gamma_0)\} + \frac{\eta}{2}. \tag{28}$$

Выберем теперь n_0 таким, что при $n \geqslant n_0$

$$\mathbf{P}\{\mathbf{U}(\xi_n, g, f, \Delta_k)\} < \mathbf{P}\{\mathbf{U}(\xi_0, g, f, \Delta_k)\} + \frac{\eta}{2}, \tag{29}$$

что можно сделать, так как множество $\mathbf{U}(\xi, g, f, \Delta_k)$ замкнуто.

Наконец, всегда имеет место

$$\mathbf{P}\{\mathbf{U}(\xi_n, g, f, \Gamma_0)\} \leqslant \mathbf{P}\{\mathbf{U}(\xi_n, g, f, \Delta_k)\}. \tag{30}$$

Складывая (28), (29) и (30) и переходя к пределу по n, получаем (27).

Заметим, что при доказательстве неравенства (27) мы не накладывали никаких ограничений на функции $g(t)$ и $f(t)$.

Сложнее доказательство обратного неравенства

$$\underline{\lim_{n\to\infty}} \mathbf{P}\{\mathbf{U}(\xi_n, g, f, \Gamma_0)\} > \mathbf{P}\{\mathbf{U}(\xi_0; g, f, \Gamma_0)\} - \eta. \tag{31}$$

Согласно (18) всегда можно выбрать $\varepsilon > 0$ так, что

$$\mathbf{P}\{\mathbf{U}(\xi_0, g+3\varepsilon, f-3\varepsilon, \Gamma_0)\} > \mathbf{P}\{\mathbf{U}(\xi_0, g, f, \Gamma_0)\} - \frac{\eta}{2}. \tag{32}$$

Каковы бы ни были кусочно-непрерывные функции $g(t)$ и $f(t)$, всегда можно выбрать ступенчатые функции $g_1(t)$ и $f_1(t)$ с разрывами в точках Γ_0 так, чтобы $g_1(t) + \varepsilon > g(t) > g_1(t)$; $f_1(t) > f(t) > f_1(t) - \varepsilon$. Тогда

$$\mathbf{U}(\xi, g_1+\delta+\varepsilon, f_1-\delta-\varepsilon, \Gamma_0) \subset \mathbf{U}(\xi, g+\delta, f-\delta, \Gamma_0) \subset \mathbf{U}(\xi, g_1+\delta, f_1-\delta, \Gamma_0). \tag{33}$$

Следовательно, имеют место неравенства

$$\mathbf{P}\{\mathbf{U}(\xi_0, g_1+3\varepsilon, f_1-3\varepsilon, \Gamma_0)\} \geqslant \mathbf{P}\{\mathbf{U}(\xi_0, g+3\varepsilon, f-3\varepsilon, \Gamma_0)\}, \tag{34}$$

$$\mathbf{P}\{\mathbf{U}(\xi_n, g, f, \Gamma_0)\} \geqslant \mathbf{P}\{\mathbf{U}(\xi_n, g_1+\varepsilon, f_1-\varepsilon, \Gamma_0)\}. \tag{35}$$

Выберем по ε такое k, чтобы при любом n имело место

$$\mathbf{P}\{\mathbf{U}(\xi_n, g_1+\varepsilon, f_1-\varepsilon, \Gamma_0)\} > \mathbf{P}\{\mathbf{U}(\xi_n, g_1+2\varepsilon, f_1-2\varepsilon, \Delta_k)\} - \frac{\eta}{2}. \tag{36}$$

Возможность такого выбора доказана в лемме. Выберем тепер n_0 так, что при $n \geqslant n_2$

$$\mathbf{P}\{\mathbf{U}(\xi_n, g_1+2\varepsilon, f_1-2\varepsilon, \Delta_k)\} > \mathbf{P}\{\mathbf{U}(\varepsilon_0, g_1+3\varepsilon, f_1-3\varepsilon, \Delta_k)\}. \tag{37}$$

Наконец, всегда имеет место

$$\mathbf{P}\{\mathbf{U}(\xi_0, g_1+2\varepsilon, f_1-3\varepsilon, \Delta_k)\} \geqslant \mathbf{P}\{\mathbf{U}(\xi_0, g_1+3\varepsilon, f_1-3\varepsilon, \Gamma_0)\}. \tag{38}$$

Складывая соотношения (32), (34) — (38) и переходя по n к пределу, получаем (31). Так как η — произвольно, то $\underline{\lim_{n\to\infty}} \mathbf{P}\{\mathbf{U}(\xi_n, g, f, \Gamma_0)\}$ существует и равен $\mathbf{P}\{\mathbf{U}(\xi_0, g, f, \Gamma_0)\}$, что доказывает теорему.

Замечания. 1°. В доказательстве фактически используется не условие (17), а менее ограничительное соотношение (25).

2°. Доказательство без труда переносится на случай, когда $g(t)$ и $f(t)$ суть равномерные монотонные пределы ступенчатых функций, полунепрерывных соответственно сверху и снизу.

3°. Аналогичную теорему можно доказать для векторных случайных процессов, а также для случайных полей.

4°. Пусть известно, что процесс $\xi(t)$ стохастически непрерывен в точке t_0 и удовлетворяет условию (17). Положим в формуле (24) $k=0$, $|T|=h$, и заменим $\xi(t)$ на случайную функцию $\xi(t)-\xi(t_0)$, также удовлетворяющую условию (17). Из этой оценки нетрудно вывести, что процесс $\xi(t)$ непрерывен в точке t_0 с вероятностью 1.

Доказанная теорема дает новое обоснование метода разыскания асимптотических распределений критериев согласия, предложенного в нестрогой, эвристической форме Doob'ом [3] и развитого затем Donsker'ом [4]. (Метод этот был близок к тому, который был использован Колмогоровым [5] еще в 1933 г.). Рассмотрим случайную функцию $\gamma_n(t)=\sqrt{n}[F_n^*(t)-t]$, где $F_n^*(t)$ — эмпирическая функция распределения n наблюдений случайной величины, равномерно распределенной на отрезке $[0,1]$. Если мы введем вспомогательную функцию распределения $\Lambda(t)$ меры, сосредоточенной в точках $t_1, t_2, \ldots, t_m$ с массами соответственно $-\lambda_1, -\lambda_2, \ldots, -\lambda_m$, причем будем считать, что $\Lambda(1)=0$, то характеристическую функцию совместного распределения значений случайного «процесса» $\gamma_n(t)$ в «моменты времени» $t_1, \ldots, t_m$ удобно записать в виде

$$\varphi_n(\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_m)=\left[\exp\left\{-i\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{n}}\Lambda(t)\,dt\right\}\int_0^1 \exp\left\{\frac{i}{\sqrt{n}}\Lambda(t)\right\}dt\right]^n. \tag{39}$$

Нетрудно видеть, что при $n\to\infty$ и при фиксированных $t_1, \ldots, t_m$ и $\lambda_1, \ldots, \lambda_m$ функции $\varphi_n(\lambda_1, \ldots, \lambda_m)$ сходятся к характеристической функции условного винеровского процесса $\xi(t)$ с условием $\xi(1)=0$, которая может быть записана

$$\varphi(\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_m)=\exp\left\{-\frac{1}{2}\int_0^1 [\Lambda(t)]^2\,dt+\frac{1}{2}\left[\int_0^1 \Lambda(t)\,dt\right]^2\right\}. \tag{40}$$

Нетрудно проверить, что процесс $\gamma_n(t)$ удовлетворяет условию (17), так как

$$\mathrm{M}[\gamma_n(t+\tau_1)-\gamma_n(t)]^2[\gamma_n(t)-\gamma_n(t-\tau_2)]^2= \tag{41}$$

$$=\left(1-\frac{1}{n}\right)\tau_1\tau_2(1-\tau_1)(1-\tau_2)+\frac{1}{n}\tau_1\tau_2[\tau_2(1-\tau_1)^2+\tau_1(1-\tau_2)^2+$$
$$+\tau_1\tau_2(1-\tau_1-\tau_2)]=O(|\tau_1+\tau_2|^2).$$

Поэтому мы можем утверждать, что асимптотическое распределение любого критерия согласия типа критериев согласия Колмогорова [5] и Смирнова [6], см., например, [7], [8], совпадает с соответствующим распределением для условного винеровского процесса.

Следует отметить, что точно так же можно свести доказательство предложений о поведении последовательности сумм независимых случайных величин к доказательству аналогичных предложений для винеровского случайного процесса.

В заключение автор выражает глубокую благодарность Андрею Николаевичу Колмогорову и Николаю Васильевичу Смирнову, руководившим его работой.

Поступила в редакцию
15.2.56

ЛИТЕРАТУРА

[1] J. L. Doob, Stochastic processes, New York — London, 1953.
[2] Е. Е. Слуцкий, Giornale dell'Istituto Italiano degli Attuari, 8 (1937), 183—19
[3] J. L. Doob, Ann. Math. Statistics, 20 (1949), 393—403.
[4] M. D. Donsker, Ann. Math. Statistics, 23 (1952), 277—281.
[5] А. Н. Колмогоров, Giornale dell'Istituto Italiano degli Attuari, 4 (193 83—91.
[6] Н. В. Смирнов, Матем. сб., 6 (44), (1939), 3—26.
[7] Г. М. Мания, ДАН СССР, 69 (1949), 495—497.
[8] A. Rényi, Acta Math. Acad. Sci. Hungaricae, 4 (1953). 191—231

LA CONVERGENCE FAIBLE DES PROCESSUS STOCHASTIQUES À TRAJECTOIRES SANS DISCONTINUITÉS DE SECONDE ESPÈCE ET L'APPROCHE DITE «HEURISTIQUE» AU TESTS DU TYPE DE KOLMOGOROV — SMIRNOV

Par N. ČENTSOV (MOSKOU)

(*Summaire*)

Théorème 1. *Étant donné un processus stochastique séparable pour lequel l'inégalité* (2) *est satisfaite — C étant une constante indépendante de t, la fonction aléatoire* $x(t)$, *définie par ce processus n'a pas, avec la probabilité un de points de discontinuité de seconde espèce.*

Nous dirons que la suite des processus stochastiques $\xi_n(t)$ converge faiblement vers le processus stochastique $\xi_0(t)$, si pour chaque ensemble fini $t_1, t_2, \ldots, t_m$, la suite des répartitions des valeurs aléatoires vectorielles $\{\xi_n(t_1), \ldots, \xi_n(t_m)\}$ converge faiblement vers celle de $\{\xi_0(t_1), \ldots, \xi_0(t_m)\}$.

Théorème 2. *Soit donné une suite deprocessus stochastique* $\xi_n(t)$ *qui converge faiblement vers un processus stochastique séparable* $\xi_0(t)$ *dela manière que les conditions* (17) *et* (18) *soient satisfaites, les fonctions* $g(t)$ *et* $f(t)$ $(g(t) < f(t))$ *sont supposées semi-continues. Alors* $\mathbf{P}\{g(t) \leqslant \xi_n(t) \leqslant f(t);$ *pour tout* $t\} \underset{n\to\infty}{\to} \mathbf{P}\{g(t) \leqslant \xi_0(t) \leqslant f(t);$ *pour tout* $t\}$.

Ce théorème est utilisé pour l'étude des repartitions asymptotiques de certains tests.

ПРИМЕНЕНИЕ ФУНКЦИОНАЛЬНЫХ ИНТЕГРАЛОВ К ВЫЧИСЛЕНИЮ СТАТИСТИЧЕСКОЙ СУММЫ КВАНТОВОЙ СТАТИСТИКИ

А. М. ЯГЛОМ

Известно, что при статистическом изучении термодинамических свойств квантовых систем основную роль играет «статистическая сумма»

$$Z = \sum_n e^{-\beta E_n}, \quad \beta = \frac{1}{kT}, \tag{1}$$

где k — постоянная Больцмана, T — абсолютная температура, а сумма распространена по всем собственным значениям E_n оператора энергии H рассматриваемой системы *. При переходе к классической статистической физике ту же роль играет «статистический интеграл»

$$Z^{(кл)} = \int \ldots \int e^{-\beta H(p_1, \ldots, p_n; q_1, \ldots q_n)}\, dp_1 \ldots dp_n dq_1 \ldots dq_n, \tag{2}$$

где $H(p, q)$ — классическая функция Гамильтона системы; $q_1, \ldots, q_n$ — обобщенные координаты, а $p_1, \ldots, p_n$ — отвечающие им обобщенные импульсы. Сумма (1) должна переходить в интеграл (2) при стремлении к нулю постоянной Планка h; естественно, что значительный интерес представляет вопрос о выяснении характера этого перехода и о вычислении «квантовых поправок» к интегралу (2), возникающих при малом (но отличном от нуля) h. Подобное вычисление статистической суммы для

---

* Связь Z с термодинамическими величинами определяется формулой: $kT \log Z = F$, где F — свободная энергия системы; отсюда через Z могут быть выражены и другие термодинамические величины. С другой стороны, Z входит в выражение для среднего значения $\overline{A}$ любой физической величины A: поскольку числа $e^{-\beta E_n}$ в квантовой статистике дают вероятности нахождения системы в состоянии с энергией E_n, то $\overline{A} = Z^{-1} \sum_n A_{nn} e^{-\beta E_n}$, где A_{nn} — матричные элементы A (см., например, [1]).

«почти классических» (иначе «квазиклассических») систем было осуществлено еще в начале 30-х годов Вигнером [2] и Кирквудом [3] (см. по этому поводу также учебник [1], § 33); еще один изящный вывод тех же результатов был недавно предложен И. М. Халатниковым [4] и, в немного другой форме, М. Л. Гольдбергером и Е. Н. Адамсом [11] (см. также Майер и Бэнд [12]). Однако все известные до сих пор методы выполнения этих вычислений являются довольно сложными и искусственными. Между тем существует еще один путь получения результатов, о которых здесь идет речь, несколько более простой и, как нам кажется, более естественный, чем все предыдущие; разъяснению его и будет посвящена настоящая заметка.

Как и в работе [4], мы будем рассматривать статистическую сумму (1) для частицы массы m, двигающейся в трехмерном пространстве в поле с потенциалом $U(x_1, x_2, x_3) = U(\mathbf{x})$; при этом оператор энергии H будет иметь вид *:

$$H = -\frac{h^2}{2m}\sum_{i=1}^{3}\frac{\partial^2}{\partial x_i^2} + U(\mathbf{x}). \tag{3}$$

Для вычисления суммы (1), распространенной по всем собственным значениям этого оператора, воспользуемся хорошо известным результатом о том, что при широких условиях относительно $U(\mathbf{x})$ фундаментальное решение $\varphi(\mathbf{x}, t, \mathbf{x}_0)$ (т. е. решение, обращающееся при $t = 0$ в δ-функцию $\delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}_0)$) параболического дифференциального уравнения

$$\frac{\partial\varphi(\mathbf{x}, t)}{\partial t} = \frac{1}{4}\sum_{i=1}^{3}\frac{\partial^2\varphi(\mathbf{x}, t)}{\partial x_i^2} - U(\mathbf{x})\,\varphi(\mathbf{x}, t) \tag{4}$$

представляется в виде функционального интеграла

$$\varphi(\mathbf{x}, t; \mathbf{x}_0) = \int\limits_{C_{t;\,\mathbf{x}-\mathbf{x}_0}} \exp\left\{-\int_0^t U[\mathbf{x}_0 + \mathbf{x}(\tau)]\,d\tau\right\} d_{w(t;\,\mathbf{x}-\mathbf{x}_0)}\mathbf{x}(\tau). \tag{5}$$

Здесь $C_{t;\,\mathbf{x}}$ есть совокупность непрерывных векторных функций $\mathbf{x}(\tau)$ на отрезке $[0, t]$, удовлетворяющих условиям $\mathbf{x}(0) = 0$, $\mathbf{x}(t) = \mathbf{X}$, а $d_{w(t;\,\mathbf{X})}\mathbf{x}(\tau)$ есть «условная мера Винера», задающая распределение вероятностей для траекторий простейшего марковского случайного процесса — брауновского движения безынерционной свободной частицы в трехмерном пространстве, проходящих через точки $\mathbf{x}(0)=0$ и $\mathbf{x}(t)=\mathbf{X}$. Эта мера определяется следующей формулой для меры «квазиинтервала»: при $0 < t_1 < \ldots < t_{n-1} <$

$$\mathrm{Mes}_{w(t;\,\mathbf{X})}\{a_{ik} < x_i(t_k) < b_{ik};\ i = 1, 2, 3,\ k = 1, 2, \ldots, n-1\} =$$

$$= \prod_{i=1}^{3}\frac{1}{[\pi^n t_1(t_2 - t_1)\ldots(t_{n-1} - t_{n-2})(t - t_n)]} \times$$

$$\times \int_{a_{i1}}^{b_{i1}} \ldots \int_{a_{i,n-1}}^{b_{i,n-1}} e^{\frac{x_1^2}{t_1} - \sum_{j=1}^{n-2}\frac{(x_{j+1} - x_j)^2}{t_{j+1} - t_j} - \frac{(X - x_{n-1})^2}{t - t_{n-1}}}\, dx_1 \ldots dx_{n-1}. \tag{6}$$

* В случае системы из N частиц, имеющей гамильтониан

$$H = -\sum_{i=1}^{3N}\frac{h^2}{2m_i^2}\frac{\partial^2}{\partial x_i^2} + U(x_1, x_2, \ldots, x_{3N})$$

(именно этот случай рассматривается в [1—3] и [11], [12]), все вычисления будут точно совпадать с теми, которые приводятся ниже в применении к гамильтониану (3), если только не учитывать дополнительных «обменных» эффектов, возникающих в случае тождественности частиц. Учет этих эффектов приводит к небольшим дополнительным поправкам (порядка h^3 и выше) в выражении для Z, вычисление которых должно производиться отдельно (ср. [1] и [3]).

($\mathrm{Mes}_{w(t;\,\mathbf{x})}\{\cdot\ \cdot\}$ означает меру совокупности функций из $C_{t;\,\mathbf{x}}$, удовлетворяющих условиям, указанным в фигурных скобках). Результат (5) был впервые указан (без строгого математического доказательства) в 1948 г. Фейнманом [5] в применении к уравнению Шредингера (вместо параболического уравнения (4)), после чего он многократно доказывался и обсуждался также и в математической литературе (см., например, [6—10]).

Для того чтобы приложить формулу (5) к вычислению статистической суммы (1), остается только заметить, что разложение фундаментального решения $\varphi(\mathbf{x},\ t;\ \mathbf{x}_0)$ в двойной ряд Фурье по нормированным собственным функциям $\varphi_n(\mathbf{x})$ соответствующего эллиптического дифференциального оператора

$$L = -\frac{1}{4}\sum_{i=1}^{3}\frac{\partial^2}{\partial x_i^2} + U(\mathbf{x}) \tag{7}$$

имеет вид

$$\varphi(\mathbf{x},\ t;\ \mathbf{x}_0) = \sum_n e^{-\lambda_n t}\varphi_n(\mathbf{x})\varphi_n(\mathbf{x}_0) \tag{8}$$

(λ_n — собственные значения, отвечающие собственным функциям $\varphi_n(\mathbf{x})$), откуда вытекает, что

$$\sum_n e^{-\lambda_n t} = \int_{-\infty}^{\infty}\int\int\varphi(\mathbf{x},\ t;\ \mathbf{x})\,dx_1dx_2dx_3 =$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty}\int\int\left\{\int_{C_{t;\,0}}\exp\left[-\int_0^t U[\mathbf{x}+\mathbf{x}(\tau)]\,\tau d\right]d_{w(t,\,0)}\mathbf{x}(\tau)\right\}dx_1dx_2dx_3 \tag{9}$$

(последняя формула использовалась, например, в работе [10]). Но собственные значения оператора (3), очевидно, совпадают с собственными значениями следующего оператора

$$L_1 = -\frac{1}{4}\sum_{i=1}^{3}\frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + U\left(\frac{\sqrt{2h}}{\sqrt{m}}\,\mathbf{x}\right) \tag{10}$$

$\left(\text{этот оператор получается из } H \text{ при простой замене координат: } x_i \to \frac{\sqrt{2h}}{\sqrt{m}}x_i\right)$. Отсюда видно, что статистическая сумма (1) может быть представлена в виде следующего функционального интеграла:

$$Z = \int_{-\infty}^{\infty}\int\int\left\{\int_{C_{\beta;\,0}}\exp\left[-\int_0^\beta U\left[\frac{\sqrt{2h}}{\sqrt{m}}(\mathbf{x}+\mathbf{x}(\tau))\right]d\tau\right]d_{w(\beta;\,0)}\mathbf{x}(\tau)\right\}dx_1dx_2dx_3. \tag{11}$$

Полученная формула позволяет, в частности, просто определить последовательные члены разложения Z в ряд по степеням h. Для этого прежде всего сделаем в (11) замену переменных $\frac{\sqrt{2h}}{\sqrt{m}}x_i = X_i$; тогда получаем

$$Z = \left(\frac{m}{2h^2}\right)^{3/2}\int_{-\infty}^{\infty}\int\int\left\{\int_{C_{\beta;\,0}}\exp\left[-\int_0^\beta U\left[\mathbf{X}+\frac{\sqrt{2h}}{\sqrt{m}}\mathbf{x}(\tau)\right]d\tau\right]d_{w(\beta;\,0)}x(\tau)\right\}dX_1dX_2dX_3. \tag{11'}$$

Теперь остается воспользоваться только разложением подинтегральной функции $\exp\left\{-\int_0^\beta U\left[\mathbf{X}+\frac{\sqrt{2h}}{\sqrt{m}}\times\mathbf{x}(\tau)\right]d\tau\right\}$ в ряд Тейлора по переменному — h и мы получим требуемое разложение Z.

Для дальнейшего нам понадобятся некоторые свойства условной винеровской меры $d_{w(t;\,\mathbf{X})}\mathbf{x}(\tau)$. Прежде всего воспользуемся тем, что

$$\int\limits_{C_{t;\,\mathbf{X}}} d_{w(t;\,\mathbf{X})}\mathbf{x}(\tau) = \frac{1}{(\pi t)^{s/2}}\, e^{-\frac{\mathbf{X}^2}{t}}, \qquad \int\limits_{C_{t;\,0}} d_{w(t;\,0)}\mathbf{x}(\tau) = \frac{1}{(\pi t)^{s/2}} \tag{12}$$

(полагая в (6) $a_{ik} = -\infty$, $b_{ik} = \infty$, мы получаем гауссовское распределение вероятностей относительно $\mathbf{X}$ с дисперсией, равной $t/2$). Отсюда видно, что нулевой член разложения $\exp\left\{-\int\limits_0^\beta U\left[\mathbf{X} + \frac{\sqrt{2h}}{\sqrt{m}}\mathbf{x}(\tau)\right]d\tau\right\}$ относительно h дает

$$Z \approx \left(\frac{m}{2\pi\beta h^2}\right)^{s/2} \int\limits_{-\infty}^{\infty}\int\int\int e^{-\beta U(\mathbf{X})} dX_1 dX_2 dX_3 \tag{13}$$

— это и есть нулевое («классическое») приближение к величине Z. Легко видеть, что (13) отличается от классического статистического интеграла (2) (в котором следует положить $H(p, q) = \frac{\mathbf{p}^2}{2m} + U(\mathbf{q})$) лишь несущественным численным множителем $(2\pi h)^{-3}$ *. Поскольку, к тому же, интегрирование по импульсам в (2) в рассматриваемом случае легко выполняется в явном виде, то при исследовании статистических свойств нашей системы в классической статистике можно исходить из статистического интеграла Z_0, включающего только интегрирование по координатам:

$$Z_0 = \int\limits_{-\infty}^{\infty}\int\int\int e^{-\beta U(\mathbf{X})} d\mathbf{X}_1 dX_2 dX_3. \tag{14}$$

В квазиклассическом случае к этому интегралу добавляется небольшая поправка, которую можно представить в виде степенного ряда относительно h; вычисление первых нескольких членов этого ряда и будет нашей основной задачей.

Выпишем разложение функции $e^{f(h)}$ в ряд Тейлора по h вплоть до члена порядка h^4:

$$e^{f(h)} = e^{f(0)} + hf'(0)\, e^{f(0)} + \frac{1}{2}h^2\left[f'^2(0) + f''(0)\right] e^{f(0)} +$$

$$+ \frac{1}{6}h^3\left[f'^3(0) + 3f'(0)\, f''(0) + f'''(0)\right] e^{f(0)} +$$

$$+ \frac{1}{24}h^4\left[f'^4(0) + 6f'^2(0)\, f''(0) + 3f''^2(0) + 4f'(0)\, f'''(0) + f^{\mathrm{IV}}(0)\right] f^{f(0)} + \ldots$$

В случае, когда $f(h) = -\int\limits_0^\beta U\left[\mathbf{X} + \frac{\sqrt{2h}}{\sqrt{m}}\mathbf{x}(\tau)\right]d\tau$, очевидно,

$$e^{f(0)} = e^{-\beta U(\mathbf{X})}$$

$$f^{(n)}(0) = -\left(\frac{2}{m}\right)^{\frac{n}{2}} U_{i_1 i_2 \ldots i_n}(\mathbf{X}) \int\limits_0^\beta x_{i_1}(\tau)\, x_{i_2}(\tau) \ldots x_{i_n}(\tau)\, d\tau \tag{16}$$

(здесь и всюду ниже используется обозначение

$$U_{i_1 i_2 \ldots i_n}(\mathbf{X}) = \frac{\partial^n U(\mathbf{X})}{\partial X_{i_1} \partial X_{i_2} \ldots \partial X_{i_n}} \tag{17}$$

* В формуле для F постоянный множитель в Z даст лишь несущественную аддитивную константу в выражении свободной энергии; в формуле для $\overline{A}$ он сократится в числителе и в знаменателе.

и по дважды встречающимся индексам предполагается суммирование от 1 до 3). Подстановка ряда (15) — (16) в формулу (11′) приводит к ряду, члены которого содержат лишь интегралы по мере $d_{w\,(\beta;\,0)}\mathbf{x}(\tau)$ от функционалов вида $F[\mathbf{x}(\tau)] = x_{i_1}(\tau_1)\,x_{i_2}(\tau_2)\ldots x_{i_n}(\tau_n)$ — моменты многомерного распределения вероятностей (6). Каждый из таких моментов в свою очередь распадается на произведение моментов от отдельных компонент $\mathbf{x}(\tau)$ — интегралов от $x_i(\tau_1)\ldots x_i(\tau_k)$ по мере $d_{w\,(\beta;\,0)}x_i(\tau)$ в пространстве $C_{(\beta;\,0)}$ непрерывных скалярных функций $x_i(\tau)$ на интервале $[0,\ \beta]$. Далее, так как распределение вероятностей (6) является гауссовским с нулевым средним значением, то все нечетные моменты $x_i(\tau)$ будут равны нулю, а все моменты четного порядка просто выражаются через второй момент $b(\tau_1,\ \tau_2)$, который просто вычисляется:

$$\int\limits_{C_{p;\,0}} x_i(\tau_1)\,x_i(\tau_2)\ldots x_i(\tau_{2k+1})\,d_{w\,(\beta;\,0)}x_i(\tau) \equiv 0, \quad i = 1,\ 2,\ 3 \tag{18}$$

и

$$\int\limits_{C_{\beta;\,0}} x_i(\tau_1)\,x_i(\tau_2)\ldots x_i(\tau_{2k})\,d_{w\,(\beta;\,0)}x_i(\tau) =$$

$$= (\pi\beta)^{-3/2} \sum_{(i_1,\ \ldots,\ i_{2k})} b(\tau_{i_1},\ \tau_{i_2})\,b(\tau_{i_3},\ \tau_{i_4})\ldots b(\tau_{i_{2k-1}},\ \tau_{i_{2k}}), \tag{19}$$

где суммирование в правой части распространено на всевозможные разбиения $2k$ индексов $1,\ 2,\ \ldots,\ 2k$ на k пар: $(i_1,\ i_2)$, $(i_3,\ i_4)$, $\ldots$, $(i_{2k-1},\ i_{2k})$ и

$$b(\tau_1,\ \tau_2) = (\pi\beta)^{3/2} \int\limits_{C_{\beta;\,0}} x(\tau_1)\,x(\tau_2)\,d_{w\,(\beta;\,0)}x(\tau) = \begin{cases} \dfrac{\tau_1(\beta-\tau_2)}{2\beta} & \text{при } \tau_1 \leqslant \tau_2 \\ \dfrac{\tau_2(\beta-\tau_1)}{2\beta} & \text{при } \tau_1 > \tau_2 \end{cases} \tag{20}$$

Эти формулы позволяют определить поправки к Z_0 любого порядка по h.

Заметим, прежде всего, что в силу (18) все нечетные относительно h члены ряда (15) — (16) после подстановки в (11′) выпадают; поэтому окончательно для Z мы получаем представление вида:

$$Z = \left(\frac{m}{2\pi\beta h^2}\right)^{3/2}[Z_0 + h^2 Z_2 + h^4 Z_4 + \ldots]. \tag{21}$$

Явная формула для Z_2 находится при помощи подстановки в (11′) вместо экспоненциальной функции выражения $\frac{1}{2}[f'^2(0) + f''(0)]\,e^{f(0)}$, где $e^{f(0)}$ и $f^{(n)}(0)$ определяются из (16); учитывая (20), мы будем иметь:

$$Z_2 = \frac{1}{m}\left\{\int\limits_{-\infty}^{\infty}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\int\limits_{-\infty}^{\infty} U_i(\mathbf{X})\,U_j(\mathbf{X})\,e^{-\beta U(\mathbf{X})}dX_1dX_2dX_3\cdot\delta_{ij}\int\limits_0^\beta\int\limits_0^\beta b(\tau_1,\ \tau_2)\cdot d\tau_1 d\tau_2 - \right.$$

$$\left. - \int\limits_{-\infty}^{\infty}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\int\limits_{-\infty}^{\infty} U_{ij}(\mathbf{X})\,e^{-\beta U(\mathbf{X})}dX_1dX_2dX_3\cdot\delta_{ij}\int\limits_0^\beta b(\tau,\ \tau)\,d\tau\right\} = \tag{22}$$

$$= \frac{\beta^3}{24m}\left\{\int\limits_{-\infty}^{\infty}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\left[(\operatorname{grad} U)^2 - \frac{2}{\beta}\Delta U\right]\right. e^{-\beta U}dX_1dX_2dX_3.$$

Последнюю формулу можно еще упростить с помощью интегрирования по частям (в предположении, что потенциальная энергия $U(\mathbf{X})$ неограниченно возрастает при $X_1^2 + X_2^2 + X_3^2 \to \infty$); тогда получаем:

$$Z_2 = -\frac{\beta^3}{24m}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\int\limits_{-\infty}^{\infty}[\operatorname{grad} U(\mathbf{X})]^2 e^{-\beta U(\mathbf{X})}dX_1dX_2dX_3. \tag{23}$$

Это и есть окончательная формула для Z_2, содержащаяся в [1—4] и [11], [12].

Немного сложнее находится и следующий член Z_4 ряда (21); для этого надо только подставить в (11′) вместо экспоненциальной функции коэффициент при h^4 в правой части (15) и воспользоваться равенством (19) с $k=2$. Для удобства мы отдельно выпишем результаты, получающиеся при подстановке во внутренний интеграл (интеграл по $d_{w(\beta;0)}\mathbf{x}(\tau)$) формулы (11′) вместо экспоненциальной функции пяти отдельных слагаемых указанного коэффициента при h^4:

$$1)\ \frac{1}{6m^2}U_iU_jU_kU_le^{-\beta U}\int_0^\beta\int_0^\beta\int_0^\beta\int_0^\beta\left\{\int_{C_{\beta;0}}x_i(\tau_1)x_j(\tau_2)x_k(\tau_3)x_l(\tau_4)\,d_{w(\beta;0)}\mathbf{x}(\tau)\right\}d\tau_1\,d\tau_2\,d\tau_3d\tau_4=$$

$$=\frac{(\pi\beta)^{-2/2}}{2m^2}U_iU_jU_kU_le^{-\beta U}\delta_{ij}\delta_{kl}\int_0^\beta\int_0^\beta b(\tau_1,\tau_2)\,d\tau_1\,d\tau_2\cdot\int_0^\beta\int_0^\beta b(\tau_3,\tau_4)\,d\tau_3\,d\tau_4=$$

$$=\frac{\pi^{-2/2}\beta^{2/2}}{1152\,m^2}[(\operatorname{grad}U)^2]^2.$$

$$2)\ -\frac{1}{m^2}U_iU_jU_{kl}e^{-\beta U}\int_0^\beta\int_0^\beta\int_0^\beta\left\{\int_{C_{\beta;0}}x_i(\tau_1)x_j(\tau_2)x_k(\tau_3)x_l(\tau_3)\,d_{w(\beta;0)}\mathbf{x}(\tau)\right\}d\tau_1\,d\tau_2\,d\tau_3=$$

$$=-\frac{(\pi\beta)^{-3/2}}{m^2}\left\{U_iU_iU_{kk}e^{-\beta U}\int_0^\beta\int_0^\beta b(\tau_1,\tau_2)\,d\tau_1\,d\tau_2\cdot\int_0^\beta b(\tau_3,\tau_3)\,d\tau_3+\right.$$

$$\left.+2U_iU_jU_{ij}e^{-\beta U}\left[\int_0^\beta d\tau_3\int_0^\beta b(\tau_1,\tau_3)\,d\tau_1\int_0^\beta b(\tau_2,\tau_3)d\tau_2\right]\right\}=$$

$$-\frac{\pi^{-3/2}\beta^{7/2}}{288\,m^2}(\operatorname{grad}U)^2\Delta Ue^{-\beta U}-\frac{\pi^{-3/2}\beta^{7/2}}{240\,m^2}U_iU_jU_{ij}e^{-\beta U}.$$

$$3)\ \frac{1}{2m^2}U_{ij}U_{kl}e^{-\beta U}\int_0^\beta\int_0^\beta\left\{\int_{C_{\beta;0}}x_i(\tau_1)x_j(\tau_1)x_k(\tau_2)x_l(\tau_2)\,d_{w(\beta;0)}\mathbf{x}(\tau)\right\}d\tau_1\,d\tau_2=$$

$$=\frac{(\pi\beta)^{-2/2}}{2m^2}\left\{U_{ii}U_{kk}e^{-\beta U}\int_0^\beta b(\tau_1,\tau_1)\,d\tau_1\int_0^\beta b(\tau_2,\tau_2)\,d\tau_2+\right.$$

$$\left.+2U_{ij}U_{ij}e^{-\beta U}\int_0^\beta\int_0^\beta b^2(\tau_1,\tau_2)\,d\tau_1\,d\tau_2\right\}=\frac{\pi^{-3/2}\beta^{5/2}}{288\,m^2}(\Delta U)^2e^{-\beta U}+\frac{\pi^{-3/2}\beta^{5/2}}{360\,m^2}U_{ij}U_{ij}e^{-\beta U}.$$

$$4)\ \frac{2}{3m^2}U_iU_{jkl}e^{-\beta U}\int_0^\beta\int_0^\beta\left\{\int_{C_{\beta;0}}x_i(\tau_1)x_j(\tau_2)x_k(\tau_2)x_l(\tau_2)\,d_{w(\beta;0)}\mathbf{x}(\tau)\right\}d\tau_1\,d\tau_2=$$

$$=\frac{2(\pi\beta)^{-2/2}}{m^2}U_iU_{ikk}e^{-\beta U}\int_0^\beta\int_0^\beta b(\tau_1,\tau_2)\,b(\tau_2,\tau_2)\,d\tau_1\,d\tau_2=\frac{\pi^{-5/2}\beta^{5/2}}{120\,m^2}U_iU_{ikk}e^{-\beta U}.$$

$$5)\ -\frac{1}{6m^2}U_{ijkl}e^{-\beta U}\int_0^\beta\left\{\int_{C_{\beta;0}}x_i(\tau_1)x_j(\tau_1)x_k(\tau_1)x_l(\tau_1)\,d_{w(\beta;0)}\mathbf{x}(\tau)\right\}d\tau=$$

$$=-\frac{(\pi\beta)^{-3/2}}{2m^2}U_{iikk}e^{-\beta U}\int_0^\beta b^2(\tau_1,\tau_1)\,d\tau_1=-\frac{\pi^{3/2}\beta^{2/2}}{240\,m^2}U_{iikk}e^{-\beta U}.$$

Просуммировав все эти выражения и проинтегрировав полученную сумму по dX_1, dX_2, dX_3, в силу (11) и (21) будем иметь:

$$Z_4 = \frac{\beta^2}{8m^2}\int_{-\infty}^{\infty}\int\int\int\left\{\frac{1}{144}[(\beta\,\mathrm{grad}\,U)^2]^2 - \frac{1}{36}[(\beta\,\mathrm{grad}\,U)^2(\beta\Delta U) - \right.$$
$$- \frac{1}{30}(\beta U_i)(\beta U_j)(\beta U_{ij}) + \frac{1}{36}(\beta\Delta U)^2 + \frac{1}{45}(\beta U_{ij})(\beta U_{ij}) + \qquad (24)$$
$$\left. + \frac{1}{15}(\beta U_i)(\beta U_{ikk}) - \frac{1}{30}\beta U_{iikk}\right\} e^{-\beta U}\,dX_1\,dX_2\,dX_3.$$

Формулу (24) (совпадающую с формулой (21) работы [4]) можно значительно упростить с помощью интегрирования по частям; при этом окончательно получаем:

$$Z_4 = \frac{\beta^2}{8m^2}\int_{-\infty}^{\infty}\int\int\int\frac{1}{720}\{[(\beta\,\mathrm{grad}\,U)^2]^2 + 12(\beta\Delta U)^2 - 8(\beta\,\mathrm{grad}\,U)^2(\beta\Delta U)\}e^{-\beta U}\,dX_1\,dX_2\,dX_3. \qquad (25)$$

Это и есть искомое выражение для Z_4.

Поступила в редакцию
20.12.55

ЛИТЕРАТУРА

[1] Л. Д. Ландау и Е. М. Лифшиц, Статистическая физика. Гостехиздат, М.— Л., 1951.
[2] E. Wigner, On the quantum correction for thermodynamic equilibrium, Phys. Rev., No. 5, 40, 1932, 749—759.
[3] J. G. Kirkwood, Quantum statistics of almost classical assemblies, Phys. Rev., 44, No 1, 1933, 31—37.
[4] И. М. Халатников, Об одном методе вычисления статистической суммы, ДАН СССР, 87, № 4, 1952, 539—542.
[5] R. P. Feynman, Space-time approach to non-relativistic quantum mechanics, Rev. mod. Phys., 20, № 2, 1948, 367—387 (русск. перевод см. в сборнике «Вопросы причинности в квантовой механике», ГИИЛ, М., 1955).
[6] M. Kac, On some connections between probability theory and differential and integral equations, Proc. second Berkeley sympos. Math. Stat. Probab., 1951, 189—215.
[7] A. Blanc-Lapierre, R. Fortet, Théorie des fonctions aléatoires, Paris, 1953.
[8] Е. Б. Дынкин, Функционалы от траекторий марковских случайных процессов, ДАН СССР, 104, № 5, 1955, 691—694.
[9] M. M. Rosenblatt, On a class of Markov processes, Trans. Amer. Math. Soc., 71, No 1, 1951, 120—135.
[10] D. Ray, On spectra of second-order differential operators., Trans. Amer. Math. Soc., 77, No 2, 1954, 299—321.
[11] M. L. Goldberger, E. N. Adams, The configurational function in quantumstatistical mechanics, Journ. Chem. Phys., 20, № 2, 1952, 240—248.

APPLICATION OF FUNCTION SPACE INTEGRALS TO THE EVALUATION OF THE STATISTICAL SUM OF QUANTUM STATISTICS

A. M. YAGLOM (MOSCOW)

(*Summary*)

The well-known result given by Feynman [5] and Kac [6] concerning the presentation of the fundamental solution of the parabolic partial equation in the form of Wiener integral is used in obtaining a simple method for deriving an expansion of the statistical sum of quantum statistics in powers of Plank's constant $\hbar$.

ОБ ОЦЕНКАХ С НАИМЕНЬШИМ СМЕЩЕНИЕМ ПРИ БИНОМИАЛЬНОМ РАСПРЕДЕЛЕНИИ

С. Х. СИРАЖДИНОВ

Пусть случайная величина x распределена по биномиальному закону:

$$\mathrm{P}(x = m) = C_n^m p^m (1-p)^{n-m}, \quad m = 0, 1, 2, \ldots, n.$$

Одной из важных с точки зрения приложений задач является указание несмещенной оценки по x для некоторой функции $f(p)$ от p. По определению $\varphi(x)$ $(x = 0,1,2,\ldots,n)$ называют несмещенной оценкой для $f(p)$, если при всех $p \in [0,1]$

$$\mathrm{M}\varphi(x) = \sum_{m=0}^{n} \varphi(m) C_n^m p^m (1-p)^{n-m} \equiv f(p) \tag{1}$$

(M — знак математического ожидания). Ясно, что не для всякой функции $f(p)$ существует несмещенная оценка по x. Многочлены $f(p)$ степени не выше n и только они допускают несмещение оценки по x, и оценки эти определяются многочленами $f(p)$ однозначно.

В тех случаях, когда для $f(p)$ не существует точной несмещенной оценки, А. Н. Колмогоров [1] указывает на полезность нахождения так называемых верхних и нижних оценок f_x^+ и f_x^- таких, что

$$\mathrm{M} f_x^- \leqslant f(p) \leqslant \mathrm{M} f_x^+ \tag{2}$$

при всех $p \in [0, 1]$.

Вопросу нахождения оценок для $f(p)$ в том случае, когда $f(p)$ не является полиномом степени $\leqslant n$, посвящена интересная работа Батачари [3]. Однако он не рассматривает вопрос нахождения равномерно наилучших оценок.

В этой заметке мы укажем один способ построения, в некотором смысле наилучших, верхних и нижних оценок f_x^+ и f_x^- для случая, когда $f(p)$ является полиномом от p степени $n+1$, и укажем одно приложение этих оценок к приемочному статистическому контролю.

1. Пусть $f(p)$—полином от p степени $n+1$ с коэффициентом при старшем члене, равном единице (последнее требование несущественно). Всегда можно подобрать числа $f_0, f_1, \ldots, f_n$ так, чтобы полином $n+1$-ой степени

$$f(p) - \sum_{m=0}^{n} f_m C_n^m p^m (1-p)^{n-m} \tag{3}$$

наименее уклонялся от нуля в промежутке $[0, 1]$. Таким полиномом является полином

$$L_{n+1}^{(p)} \quad \frac{T_{n+1}(2p-1)}{2^{2n+1}}, \tag{4}$$

где

$$T_n(x) = \sum_{k=0}^{\left[\frac{n}{2}\right]} (-1)^k \frac{n}{n-k} C_{n-k}^k x^{n-2k} 2^{n-2k-1}$$

— полином Чебышева [2]. Приравнивая коэффициенты при одинаковых степенях у полиномов (3) и $L_{n+1}^{(p)}$ для определения чисел $f_0, f_1, \ldots, f_n$, получим линейную систему $n+1$ алгебраических уравнений, из которых однозначно определяются $f_0, f_1, \ldots, f_n$. Таким образом найденную оценку f_x $(x = 0,1, \ldots, n)$ назовем оценкой для $f(p)$ с наименьшим смещением (на отрезке $0 \leqslant p \leqslant 1$). Очевидно, если f_x является

оценкой для $f(p)$ с наименьшим смещением, то из свойства полиномов Чебышева вытекает, что

$$\max_{0\leqslant p\leqslant 1} \left| f(p) - \sum_{m\leqslant n} f_m C_n^m p^m (1-p)^{n-m} \right| = \frac{1}{2^{2n+1}}. \tag{5}$$

Ясно, что оценки

$$f_x^+ = f_x + \frac{1}{2^{2n+1}}, \qquad f_x^- = f_x - \frac{1}{2^{2n+1}}, \tag{6}$$

соответственно будут верхней и нижней оценками для $f(p)$ по x. Из самой конструкции оценок f_x^+ и f_x^- следует, что они являются верхней и нижней оценками с наименьшим смещением; оценки f_x для полинома $f(p)$ эффективно могут быть построены следующим образом. Пусть

$$f(p) = \sum_{s+r\leqslant n} a_{sr} p^s (1-p)^r + p^{n+1}. \tag{7}$$

Можно показать ([3], [5]), что

$$\psi(x) = \sum_{s+r\leqslant n} a_{sr} \frac{C_x^s C_{n-x}^r}{C_n^{s+r} C_{s+r}^s} \qquad (x = 0, 1, 2, \ldots, n)$$

будет единственной несмещенной оценкой для $\sum_{s+r\leqslant n} a_{sr} p^s (1-p)^r$. Пусть, далее, $p_x (x = 0, 1, 2, \ldots, n)$ будет оценкой для p^{n+1} по x с наименьшим смещением. Тогда, очевидно, $f_x = p_x + \psi(x)$. Таким образом, табулируя значения p_x для различных n, мы сможем найти для любого полинома $f(p)$ вида (7) оценки с наименьшим смещением и, следовательно, построить наилучшие верхние и нижние оценки (6) для $f(p)$ по x.

Сделаем несколько замечаний:

1°. Если оценки f_x^+ и f_x^- для полинома $f(p)$ ищутся такими, чтобы неравенства (2) были справедливы при $p \in [\alpha, \beta]$, где $0 \leqslant \alpha < \beta \leqslant 1$, то ясно, что значения оценок f_x (так же как и p_x) будут несколько иными, однако возможное значение уклонения будет $(\beta - \alpha)^n / 2^{2n+1}$ — еще лучшим.

2°. Если полином (7) при p^{n+1} содержит коэффициент $A_{n+1} (\neq 0)$, то, очевидно, оценкой для $f(p)$ по x с наименьшим смещением будет

$$f_x = A_{n+1} p_x + \psi(x).$$

При этом максимальное уклонение (5) будет равно $|A_{n+1}| / 2^{2n+1}$.

3°. Если x распределена по гипергеометрическому закону, то аналогичным образом для всякого полинома $f(p)$ степени $n+1$ можно построить единственную оценку f_x с наименьшим смещением.

4°. Если x распределена по закону Пуассона с параметром λ, то интерес представляет следующий факт: для того чтобы функция $f(\lambda)$ допускала единственную несмещенную оценку по x, необходимо и достаточно, чтобы $f(\lambda)$ была целой функцией от λ. Эта единственная несмещенная оценка f_x для $f(\lambda)$ по x дается формулой

$$f_x = \sum_{k=0}^{x} C_x^k f^{(k)}(0), \qquad x = 0, 1, 2, \ldots$$

Здесь $f^{(k)}(0)$ — производная k-го порядка от $f(\lambda)$ в точке $\lambda = 0$. В самом деле, если f_x — единственная несмещенная оценка для $f(\lambda)$ по x, то для каждого $\lambda \geqslant 0$

$$f(\lambda) = \sum_{x=0}^{\infty} f_x \frac{\lambda^x}{x!} e^{-\lambda}$$

и ряд справа будет абсолютно сходящимся. Легко сообразить, что тогда $f(\lambda)$ — целая функция. Обратно, если $f(\lambda)$ — целая функция, то из единственности разложения

целой функции $f(\lambda)e^{\lambda}$ по степеням λ заключаем о существовании и единственности несмещенной оценки f_x для $f(\lambda)$. Выражение для f_x получается из сравнения коэффициентов при одинаковых степенях λ у разложения $f(\lambda)e^{\lambda}$ и $\sum_{x=0}^{\infty} f_x \frac{\lambda^x}{x!}$.

2. Пусть имеется партия готовых изделий достаточно большого объема N. Каждое изделие может быть отнесено к одной из двух категорий: годное или дефектное. Производится выборка объема n. Если число дефектных изделий x в выборке не более числа C, то партия принимается; в противном случае партия обследуется сплошь и все обнаруженные дефектные изделия заменяются заведомо годными, после чего партия принимается.

Пусть p — доля дефектных изделий в партии. Тогда величина

$$p^* = \begin{cases} p - \frac{x}{N} & \text{при } x \leqslant C \\ 0 & \text{при } x > C \end{cases}$$

будет долей принятых дефектных изделий после контроля.

Если считать x распределенным по биномиальному закону, то математическое ожидание p^* будет [1]

$$Q(p) = \mathrm{M}p^* = \sum_{m \leqslant C} \left(p - \frac{m}{N}\right) C_n^m p^m (1-p)^{n-m}. \tag{8}$$

Требуется найти оценку для $Q(p)$ или, что то же самое, для p^* по x. Ввиду того что $Q(p)$ является полиномом $n+1$-ой степени по отношению к p, то для нее точной несмещенной оценки по x не существует.

Используя идеи предшествующего пункта, построим такую оценку $Q_x (x=0, 1, 2, \ldots, n)$ для $Q(p)$, чтобы величина

$$\sup_{0<p\leqslant 1} \left| \frac{\mathrm{M}Q_x - Q(p)}{p} \right| = \Delta_n (Q_0, Q_1, \ldots, Q_n) \tag{9}$$

приняла наименьшее возможное значение *.

Пусть такая оценка Q_x найдена, т. е.

$$\inf_{-\infty<Q_i'<\infty} \Delta_n (Q_0', Q_1', \ldots, Q_n') = \Delta_n (Q_0, Q_1, \ldots, Q_n) = \Delta_n,$$

тогда, очевидно,

$$Q_x^+ = Q_x + \frac{x}{n}\Delta_n \tag{10}$$

$$Q_x^- = Q_x - \frac{x}{n}\Delta_n$$

будут соответственно верхней и нижней оценками по x для $Q(p)$ с наименьшим относительным смещением.

Перейдем к нахождению оценки Q_x. Прежде всего заметим, что

$$Q(p) = p \sum_{m \leqslant c} C_n^m p^m (1-p)^{n-m} - \frac{1}{N} \sum_{m \leqslant c} m C_n^m p^m (1-p)^{n-m}. \tag{11}$$

Несмещенной оценкой для $\frac{1}{N} \sum_{m \leqslant c} m C_n^m p^m (1-p)^{n-m}$ по x будет

$$\psi(x) = \begin{cases} \frac{x}{N} & \text{при } x \leqslant c, \\ 0 & \text{при } x > c. \end{cases} \tag{12}$$

---

* Первоначально для $\mathrm{M}p^*$ мною были построены оценки, аналогичные оценкам первого пункта. Вес $\frac{1}{p}$ был предложен А. Н. Колмогоровым.

Если φ_x — оценка с наименьшим относительным смещением для $p\sum_{m\leqslant c} C_n^m p^m (1-p)^{n-m}$, то, очевидно,

$$Q_x = \varphi_x - \psi(x). \tag{13}$$

Оценка φ_x находится из условия, что

$$\sup_{0<p\leqslant 1}\left|\frac{\mathrm{M}\,\varphi_x - p\sum_{m\leqslant c} C_n^m p^m (1-p)^{n-m}}{p}\right| = \Delta_n(\varphi_0, \varphi_1, \ldots, \varphi_n)$$

$$\inf \Delta_n(\varphi_0', \varphi_1', \ldots, \varphi_n') = \Delta_n(\varphi_0, \varphi_1, \ldots, \varphi_n),$$

где нижняя грань берется по всем векторам $(\varphi_0', \varphi_1', \ldots, \varphi_n')$ с вещественными компонентами.

Однако легко убедиться, что $\inf \Delta_n(\varphi_0', \varphi_1', \ldots, \varphi_n')$ достигается в том случае, когда $\varphi_0' = 0$ и полином n-ой степени со старшим коэффициентом $A_n^{(c)} = (-1)^c C_{n-1}^c$.

$$\sum_{m=1}^{n} \varphi_m' C_n^m p^{m-1} (1-p)^{n-m} - \sum_{m\leqslant c} C_n^m p^m (1-p)^{n-m}, \tag{14}$$

будет наименее уклоняться от нуля в промежутке [0,1]. Таким полиномом является полином $A_n^{(c)} L(p)$, где $L_n(p)$ — полином, определенный соотношением (4). Тогда, сравнивая коэффициенты при одинаковых степенях у полиномов (14) и $A_n^{(c)} L_n(p)$, получим для определения $\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_n$ систему n-линейных алгебраических уравнений. Эти уравнения допускают единственную систему решений $\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_n$. Поэтому существует единственная оценка φ_x, а значит, и Q_x, удовлетворяющая условию (9).

Считаем $\varphi_0 = 0$. Подсчеты показывают, что

$$\varphi_1 = \frac{1}{n}\left(1 - \frac{(-1)^c C_{n-1}^c}{2^{2n-1}}\right).$$

Значения $\varphi_2, \varphi_3, \ldots, \varphi_n$ определяются последовательно из следующих соотношений: при $1 \leqslant m \leqslant c$

$$\varphi_{m+1} = (-1)^{c+1} \frac{C_{n-1}^c}{C_n^{m+1}} B_n^{(m)} + (-1)^m \sum_{k=1}^{m} (-1)^k C_{m+1}^k \varphi_k$$

при $c < m < n$

$$\varphi_{m+1} = (-1)^c \frac{C_n^m C_{m-1}^c - C_{n-1}^c B_n^{(m)}}{C_n^{m+1}} + (-1)^m \sum_{k=1}^{m} (-1)^k C_{m+1}^k \varphi_k.$$

В этих соотношениях положено

$$B_n^{(m)} = \frac{(-1)^{n+m}}{2^{2(n-m)}} \cdot \frac{n}{m} C_{n+m-1}^{2m-1}.$$

Простых выражений для φ_m в общем случае не удалось получить. Однако для φ_n имеем следующую формулу

$$\varphi_n = \frac{C_{n-1}^c}{2^{2n-1}} (-1)^{n+c-1}. \tag{15}$$

При $m > c$ значения φ_m попеременно будут положительными и отрицательными. Это обстоятельство не должно нас смущать. На такую возможность, даже при более общих обстоятельствах, указано в работе [4].

Из свойств полиномов Чебышева следует, что

$$\Delta_n^{(c)} = \sup_{0<p\leqslant 1}\left|\frac{\mathrm{M}\,\varphi_x - p\sum_{m\leqslant c} C_n^m p^m (1-p)^{n-m}}{p}\right| = \frac{C_{n-1}^c}{2^{2n-1}} \tag{16}$$

ТАБЛИЦА 1

Значения φ_x в случае $c=0$

$\pm\varphi_x$ \ n	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
$+\varphi_1$	0.19961	.16659	.14284	.12500	.11111	.10000	.09091	.08333	.07692	.07143	.06667
$-\varphi_2$	.09102	.06449	.04708	.03558	.02775	.02221	.01818	.01515	.10282	.01099	.00952
$+\varphi_3$	.05000	.03628	.02476	.01680	.01161	.00825	.00604	.00454	.00349	.00275	.00220
$-\varphi_4$	.01797	.01829	.01429	.00995	.00662	.00436	.00291	.00199	.00139	.00100	.00073
$+\varphi_5$	.00195	.00545	.00635	.00542	.00397	.00268	.00175	.00113	.00074	.00049	.00033
$-\varphi_6$		.00049	.00160	.00212	.00198	.00154	.00108	.00072	.00046	.00029	.00019
$+\varphi_7$			.00012	.00046	.00068	.00070	.00058	.00043	.00029	.00019	.00012
$-\varphi_8$				.00003	.00013	.00021	.00024	.00021	.00016	.00012	.00008
$+\varphi_9$					.00001	.00004	.00006	.00008	.00008	.00006	.00005
$-\varphi_{10}$						.00000	.00001	.00002	.00003	.00002	.00002
$+\varphi_{11}$							.00000	.00001	.00000	.00002	.00000
$-\varphi_{12}$								.00000	.00000	.00000	.00000
$+\varphi_{13}$									.00000	.00000	.00000
$-\varphi_{14}$										.00000	.00000
$+\varphi_{15}$											.00000

ТАБЛИЦА 2

Значения φ_x в случае $c=1$

$\pm\varphi_x$ \ n	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
$+\varphi_1$	0.20156	.16707	.14296	.12503	.11112	.10000	.09091	.08333	.07692	.07143	.06667
$+\varphi_2$	.36406	.32243	.28251	.24908	.22196	.19993	.18180	.16666	.15384	.14286	.13333
$-\varphi_3$	.20000	.18140	.14856	.11760	.09290	.07428	.06039	.04994	.04194	.03571	.03077
$+\varphi_4$	.07188	.09147	.08571	.06964	.05294	.03928	.02912	.02184	.01666	.01295	.01024
$-\varphi_5$	.00781	.02726	.03812	.03795	.03175	.02415	.01750	.01243	.00882	.00632	.00460
$+\varphi_6$		.00244	.00963	.01481	.01582	.01388	.01082	.00787	.00551	.00379	.00261
$-\varphi_7$			.00073	.00323	.00545	.00627	.00581	.00470	.00350	.00246	.00167
$+\varphi_8$				.00021	.00104	.00192	.00237	.00233	.00197	.00151	.00110
$-\varphi_9$					.00006	.00033	.00065	.00087	.00092	.00083	.00064
$+\varphi_{10}$						.00001	.00011	.00021	.00028	.00029	.00028
$-\varphi_{11}$							.00002	.00005	.00012	.00021	.00027
$+\varphi_{12}$								.00000	.00000	.00008	.00012
$-\varphi_{13}$									.00000	.00001	.00001
$+\varphi_{14}$										.00000	.00000
$-\varphi_{15}$											.00000

и, следовательно, на основании (11), (12) и (13)

$$\sup_{0<p\leqslant 1}\left|\frac{\mathbf{M}\,Q_x - Q(p)}{p}\right| = \Delta_n^{(c)}.$$

Отсюда ясно, что

$$Q_x^+ = \varphi_x - \psi(x) + \frac{x}{n}\Delta_n^{(c)},$$

$$Q_x^- = \varphi_x - \psi(x) - \frac{x}{n}\Delta_n^{(c)}$$

будут соответственно верхней и нижней оценками для $Q(p)$:

$$\mathbf{M}\,Q_x^- \leqslant Q(p) \leqslant \mathbf{M}\,Q_x^+.$$

При этом оценки Q_x^+ и Q_x^- будут оценками с наименьшим относительным смещением на отрезке [0,1].

В таблицах * 1 и 2 приведены значения φ_x для $c = 0{,}1$ и n от 5 до 15.

Из (15) и (16) видно, что $\Delta_n^{(c)} = |\varphi_n|$, поэтому значения $\Delta_n^{(c)}$ также могут быть найдены из таблиц 1 и 2.

Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова

Поступила в редакцию 6. 12. 55

ЛИТЕРАТУРА

[1] А. Н. Колмогоров, Изв. АН СССР, Сер. матем., **14** (1950), 303—326.
[2] И. П. Натансон, Конструктивная теория функций, Москва — Ленинград, Гостехиздат, 1949.
[3] A. Bhattacharyya, Calcutta Statist. Assoc. Bull., 5 (1954), 149—164.
[4] P. Halmos, Ann. Math. Statistics, **17** (1946), 34—43.
[5] M. A. Girshick, F. Mosteller, L. J. Savage, Ann. Math. Statistics, **17** (1946), 13—23.

CONCERNING ESTIMATIONS WITH MINIMUM BIAS FOR A BINOMIAL DISTRIBUTION

S. H. SIRAŻDINOV

(Summary)

Let x be a random variable that conforms to a binomial distribution with parameters n, p. The paper deals with the determination of upper and lower estimations of x for arbitrary polynomials of the $n+1$-th degree. These estimations are the best uniformly on [0, 1]. They are found for two different cases of determining the measure of deviation Δ:

a) $$\Delta = \sup_{0\leqslant p\leqslant 1} |\,\mathbf{M}\,f_x - f(p)\,|,$$

b) $$\Delta = \sup_{0<p\leqslant 1}\left|\frac{1}{p}(\mathbf{M}\,f_x - f(p))\right|$$

The results are given as formulas and are also presented as numerical tables.

---

* Таблицы вычислены лаборантами кафедры теории вероятностей МГУ А. А. Артемовой и Т. Н. Топорищевой.

ВНИМАНИЮ АВТОРОВ

1. Журнал «Теория вероятностей и ее применения» принимает оригинальные статьи и краткие сообщения по теории вероятностей, общим вопросам математической статистики и применениям теории вероятностей в естествознании и технике. Статьи по прикладным вопросам принимаются лишь в случае существенной новизны применяемых математических методов.

2. Статьи и краткие сообщения печатаются на русском языке с резюме на английском, немецком или французском языках или на английском, немецком, французском языках с резюме на русском языке.

3. Рукопись представляется в двух экземплярах напечатанной на машинке через два интервала на одной стороне листа с указанием адреса автора. Редакция просит в оформлении цитируемой литературы придерживаться порядка, принятого в журнале.

4. Авторам статей высылаются 50 оттисков.

5. Статьи следует направлять по адресу: Москва В-234, МГУ, Механико-математический факультет, кафедра теории вероятностей, или Киев, площадь Калинина, 6, Институт математики АН УССР.

AN UNSERE AUTOREN

1. Die Zeitschrift «Die Wahrscheinlichkeitsrechnung und ihre Anwendungen» veröffentlicht Originalarbeiten und kurze Mitteilungen über Wahrscheinlichkeitsrechnung, allgemeine Fragen der mathematischen Statistik und über die Anwendungen der Wahrscheinlichkeitsrechnung in den Naturwissenschaften und der Technik. Arbeiten über Fragen der Anwendungen werden nur dann angenommen, wenn sie etwas wesentlich Neues über die angewandten mathematischen Methoden enthalten.

2. Artikel und kurze Mitteilungen werden entweder in russischer Sprache mit kurzen Susammenfassungen in englischer, deutscher oder französischer Sprache, oder in englischer, deutscher oder französischer Sprache mit einer kurzen Zusammenfassung in russischer Sprache gedruckt.

3. Alle Manuskripte müssen in zwei Schreibmaschinenexemplaren eingereicht werden und mit der Adresse des Autors versehen sein. Die Redaktion bittet, bei der Literaturangabe die in der Zeitschrift übliche Ordnung einzuhalten.

4. Jeder Autor eines Artikels erhält 50 Sonderabdrücke.

5. Artikel können an folgende Adressen geschickt werden: Moskau W-234, MGU (Moskauer Staatliche Universität), mechanisch-mathematische Fakultät, Kathedra der Wahrscheinlichkeitsrechnung, oder Kiew, Kalininplatz, 6, Mathematisches Institut der Akademie der Wissenschaften der U. S. S. R.

A VIS AUX AUTEURS

1. Le journal «Le calcul des probabilités et ses applications» est destiné à publier des articles originaux et des notes sur le calcul des probabilités, les questions générales de la statistique mathématique et les applications du calcul des probabilités aux sciences naturelles et à la technique. Les articles traitant des applications pratiques ne sont acceptés que dans le cas où l'on peut y trouver des méthodes mathématiques essentiellement nouvelles.

2. Les articles et les notes sont imprimés en russe avec un résumé anglais, allemand ou français, ou bien dans l'une de ces langues avec un résumé russe.

3. Les manuscrits doivent être présentés en deux exemplaires dactilographiés d'un seul côté d'une feuille de papier avec indication de l'adresse de l'auteur. Les auteurs sont priés d'indiquer la littérature citée dans la forme adoptée par la Rédaction du journal.

4. Les auteurs reçoivent gratuitement 50 tirages à part.

5. Les articles doivent être adressées: Moscou B-234, Université Lomonosoff, Faculté des mathématiques et de mécanique, chaire de la théorie des probabilités ou bien Kiev, place de

Kalinine, 6, Institut Mathématique de l'Académie des Sciences de la R. S. S. U.

NOTE TO AUTHORS

1. The journal «The Theory of Probability and Its Applications» accepts original articles and communications on the theory of probability, general problems of mathematical statistics and applications of the theory of probability to natural science and technology.

Articles of the letter kind will be accepted only if the mathematical methods applied are essentially new.

2. Articles and communications will be published either in Russian with summaries in English, German or French, or in English, German or French with summaries in Russian.

3. All contributions should be sent in two copies, which are typewritten only on one side of the sheet with double spaces. References to books and articles cited should conform to the standard adopted by the publishers.

4. The authors will be sent 50 copies of their articles.

5. Authors are requested to adress their contributions: Moscow, B-234, MGU (State University), Department of Mathematics and Mechanics; or to Kiev, Kalinin Square 6, Institute of Mathematics of the Academy of Sciences of the Ukrainian SSR.

Ченцов Н. Н. Слабая сходимость случайных процессов с траекториями без разрыва второго рода и так называемый «эвристический» подход к критериям согласия типа Колмогорова — Смирнова 155

Čentsov N. La convergence faible des processus stochastiques à trajectoires sans discontinuités de seconde espèce et l'approche dite «heuristique» en tests du type de Kolmogorov—Smirnov 161

Яглом А. М. Применение функциональных интегралов к вычислению статистической суммы квантовой статистики 161

Yaglom A. M. Application of function space integrals to the evaluation of the statistical sum of quantum statistics 167

Сираждинов С. Х. Об оценках с наименьшим смещением при биномиальном распределении 168

Siraždinov S. H. Concerning estimations with minimum bias for a binomial distribution 174

Т-07837 Подписано к печати 22. VIII 1956 г. Формат бум. $70\times108^1/_{16}$. Зак. 405
Уч.-изд. л. 14,1 Бум. л. $5^1/_2$ Печ. л. 15,07 Тираж 1750 экз.

2-я типография Издательства Академии наук СССР. Москва, Шубинский пер., 10

Цена 11 р. 25 к.

3-40
1.12

ИЗДАТЕЛЬСТВО АКАДЕМИИ НАУК СССР

КОНТОРА «АКАДЕМКНИГА»

ИМЕЮТСЯ В ПРОДАЖЕ КНИГИ:

Делоне Б. Н. Краткое изложение доказательства непротиворечивости планиметрии Лобачевского. (Математический Институт им. В. А. Стеклова). 1953. 128 стр., с илл. Ц. 4 р. 65 к.

Марков А. А. Избранные труды. Теория чисел. Теория вероятностей. *Ред. проф.* Ю. В. Линника. Комментарии Ю. В. Линника, Н. А. Сапогова, О. В. Сарманова и В. Н. Тимофеева. (Серия «Классики науки»,) 1951. 719 стр., 3 вкл. Ц. 25 р. 60 к. в пер.

Слуцкий Е. Е. Таблицы для вычисления неполной Г-функции и функции вероятности X^2. *Под ред. акад.* А. Н. Колмогорова. (Математический институт им. В. А. Стеклова). 1950. 70 стр. Ц. 7 р. 20 к.

Труды Математического института им. В. А. Стеклова:

ТОМ XVII. Л. В. Келдыш. Структура B-множеств. 1945. 74 стр. Ц. 5 р. 60 к.

ТОМ XXIV. Н. А. Шанин. О произведении топологических пространств. 1948. 111 стр. Ц. 4 р. 80 к.

ТОМ XXIX. А. В. Погорелов. Однозначная определенность выпуклых поверхностей. 1949. 99 стр. Ц. 4 р.

ТОМ XXXIV. Л. И. Волковыский. Исследования по проблемам типа односвязной римановой поверхности. 1950. 171 стр. Ц. 6 р. 80 к.

ТОМ XXXVIII. Сборник статей. Посвящается академику Ивану Матвеевичу Виноградову к его 60-летию. 1951. 387 стр. Ц. 16 р.

ТОМ XLVI. М. М. Постников. Исследования по гомотопической теории непрерывных отображений. I. Алгебраическая теория систем. II. Натуральная система и гомотопический тип. 1955. 158 стр. Ц. 7 р. 35 к.

ТОМ XLIX. А. Я. Хинчин. Математические методы теории массового обслуживания. 1955. 122 стр. Ц. 5 р. 75 к.

КНИГИ ПРОДАЮТСЯ В МАГАЗИНАХ «АКАДЕМКНИГА».
ИНОГОРОДНИМ ЗАКАЗЧИКАМ КНИГИ ВЫСЫЛАЮТСЯ ПО ПОЧТЕ НАЛОЖЕННЫМ ПЛАТЕЖОМ.
ЗАКАЗЫ НАПРАВЛЯТЬ ПО АДРЕСУ:
МОСКВА, УЛ. КУЙБЫШЕВА, 8, КОНТОРА «АКАДЕМКНИГА».